Geometria 6/3/19

V sp. rett. su $\mathbb{R}$ prod. scal. su V è
$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$
bilineare, simmetrica, def. pos. ; $\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle} \geq 0$.

C-S : $|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$; uguale solo se proporz

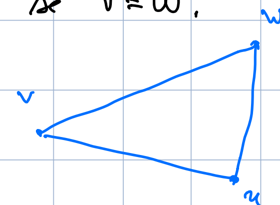
Prop (disuguaglianza triang) : $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Dim :
$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w \,|\, v+w\rangle \\ &= \langle v|v\rangle + \langle v|w\rangle + \langle w|v\rangle + \langle w|w\rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v|w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\underset{C.S.}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|v\| + \|w\|)^2 .\end{aligned}$$
$\boxtimes$

Visto per $\mathbb{R}^2$: $\text{dist}(x,y) = \|x-y\|$.

Def: chiamo distanza associata a $\langle \cdot | \cdot \rangle$
$\text{dist}(v,w) = \|v-w\|$.

Proprietà : 1) $d(v,w) \geq 0$; nulla solo se $v=w$.
2) $d(v,w) = d(w,v)$ Simmetria
3) $d(v,w) \leq d(v,u) + d(u,w)$



Infatti: 1) $\|v-w\| \geq 0$ nulla solo se $v-w=0$, cioè $v=w$

2) $d(w,v) = \|w-v\| = \|-(w-v)\| = \|v-w\| = d(v,w)$

3) $d(v,w) = \|v-w\| = \|(v-u)+(u-w)\|$

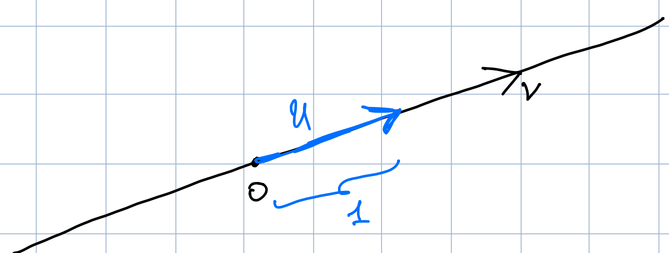
$\leq \|v-u\| + \|u-w\| = d(v,u)+d(u,w)$.

Esercizio: $\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$; provare che vale $=$ solo se $w=\lambda\cdot v$ con $\lambda \geq 0$ o viceversa.

Def: dico che $v \in V$ è unitario se $\|v\|=1$.

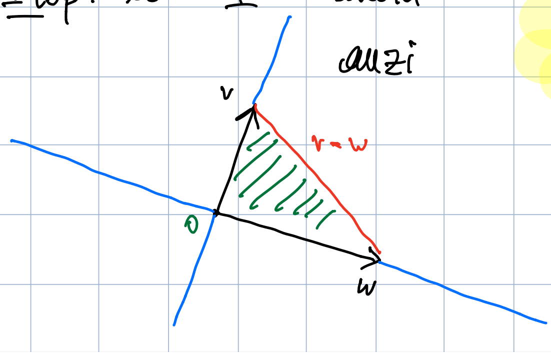
Dico che v,w sono ortogonali (perpendicolari) scrivo $v \perp w$ se $\langle v|w\rangle = 0$.

Oss: dato $v \neq 0$ ottengo u unitario che genera la stessa retta come $u = \frac{v}{\|v\|}$; $v \rightsquigarrow u$ normalizzazione.



Prop: se $v \perp w$ allora $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

anzi $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$



$\Rightarrow$ per il triangolo di vertici $0, v, w$ vale il Teo di Pitagora.

$\Rightarrow$ traduce l'idea che le rette generate da v e w formano angolo $90°$

Dim: $\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 \pm \cancel{2\langle v|w\rangle} + \|w\|^2$.

Prop: se $v_1, \dots, v_k \in V$ sono ortogonali fra loro e non nulli allora sono lin. indip.

Dim: supponiamo $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$. Allora $\forall i = 1, \dots, k$

$$0 = \langle v_i | 0 \rangle = \langle v_i | \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \rangle$$

$$= \alpha_1 \underbrace{\langle v_i | v_1 \rangle}_{=0} + \dots + \alpha_i \underbrace{\langle v_i | v_i \rangle}_{=\|v_i\|^2} + \dots + \alpha_k \underbrace{\langle v_i | v_k \rangle}_{=0}$$

$$= \alpha_i \cdot \underbrace{\|v_i\|^2}_{\neq 0} \Rightarrow \alpha_i = 0.$$

Prop: se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è base ortogonale di V (base + ortogonali fra loro), $v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i \quad \text{cioè} \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\langle v|v_1\rangle}{\|v_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\langle v|v_n\rangle}{\|v_n\|^2} \end{pmatrix}.$$

Dunque: (1) Trovare le coord. rispetto a base ortogonale richiede un calcolo non la risoluzione di sistema

(2) La coord. di v lungo v_i è $\langle v|v_i\rangle / \|v_i\|^2$
$\Rightarrow$ dipende solo da v_i. Falso se base non è ortogonale.

Es: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ -2 \\ 29 \end{pmatrix} \right)$ è base ortog. di $\mathbb{R}^3$

Basta vedere che sono ortog. fra loro ($\Rightarrow$ lin. indip $\Rightarrow$ base):

$$3\cdot 4 - 2\cdot 7 + 1\cdot 2 = 0$$

$$3\cdot(-11) + (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 29 = -33 + 4 + 29 = 0$$

$$4\cdot(-11) + 7\cdot(-2) + 2\cdot 29 = -44 - 14 + 58 = 0$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (3+6+5)/(9+4+1) \\ (4-21+10)/(16+49+4) \\ (-11+6+145)/(121+4+841) \end{pmatrix}$$

Se uso invece $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

ho sempre $[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} (3+6+5)/(9+4+1) \\ \vdots \\ \end{pmatrix}$

Esercizio: calcolare $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} \right]$ rispetto a

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verificando che sono tutte diverse.

Def: chiamo ortonormale un sistema di vettori ortogonali e unitari.

Oss: se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è base ortonormale, $v \in V$ allora

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v | v_i \rangle \cdot v_i \qquad \text{cioè} \qquad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle v | v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v | v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

<u>Oss</u>: se $(v_1, \dots, v_n)$ è base ortogonale ottengo una ortonormale normalizzandoli: $(u_1, \dots, u_n)$, $u_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$.

Q: come fabbricare basi ortogonali / ortonormali?
A: procedimento di <u>ortonormalizzazione di Gram-Schmidt</u>

<u>Teo</u>: se $v_1, \dots, v_m$ sono base di un sottosp. W di V allora si ottiene una base $u_1, \dots, u_m$ ortonormale di W così:

1) $u_1 = v_1 / \|v_1\|$
2) $z_2 = v_2 - \langle v_2 | u_1 \rangle \cdot u_1$, $u_2 = z_2 / \|z_2\|$
3) $z_3 = v_3 - \langle v_3 | u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle v_3 | u_2 \rangle \cdot u_2$ $u_3 = z_3 / \|z_3\|$

... costruito u_k con $k < m$

k+1) $z_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1} | u_i \rangle \cdot u_i$, $u_{k+1} = z_{k+1} / \|z_{k+1}\|$

Torniamo a $\boxed{v_1, \dots, v_n \text{ base ortog} \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i}$

<u>Dimo</u>: affermo che se $x \in V$ e $\langle x | v_i \rangle = 0$ $\forall i$ allora $x = 0$.

Infatti $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$;

$$0 = \langle x | v_i \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n | v_i \rangle$$
$$= \alpha_1 \underbrace{\langle v_1 | v_i \rangle}_{0} + \dots + \alpha_i \underbrace{\langle v_i | v_i \rangle}_{\|v_i\|^2 \ne 0} + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle v_n | v_i \rangle}_{0}$$

$\Rightarrow \alpha_i = 0$ $\forall i$ $\Rightarrow x = 0$; affermazione provata.

Ora pongo $x = v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \cdot v_i$.

Devo vedere che $x=0$; per l'affermazione nei basta vedere che $\langle x|v_j\rangle=0 \ \forall j$; infatti

$$\langle x|v_j\rangle = \left\langle v - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v|v_i\rangle}{\|v_i\|^2}\cdot v_i \,\middle|\, v_j\right\rangle$$

$$= \langle v|v_j\rangle - \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle v|v_i\rangle}{\|v_i\|^2}\cdot \underbrace{\langle v_i|v_j\rangle}_{\text{sempre 0 tranne che per } i=j}$$

$$= \langle v|v_j\rangle - \frac{\langle v|v_j\rangle}{\cancel{\|v_j\|^2}}\cdot \cancel{\langle v_j|v_j\rangle}$$

$$= 0.$$ $\blacksquare$

Spiegazione di Gram. Schmidt.

Fatto: per costruzione abbiamo che nel passaggio da $v_1,\dots,v_m$ base di W $\rightsquigarrow$ $u_1,\dots,u_m$ base ortonormale di W si ha che $\mathrm{Span}(u_1,\dots,u_k)=\mathrm{Span}(v_1,\dots,v_k)$ per $k=1,\dots,m$.

Costruiti $u_1,\dots,u_k$ pongo

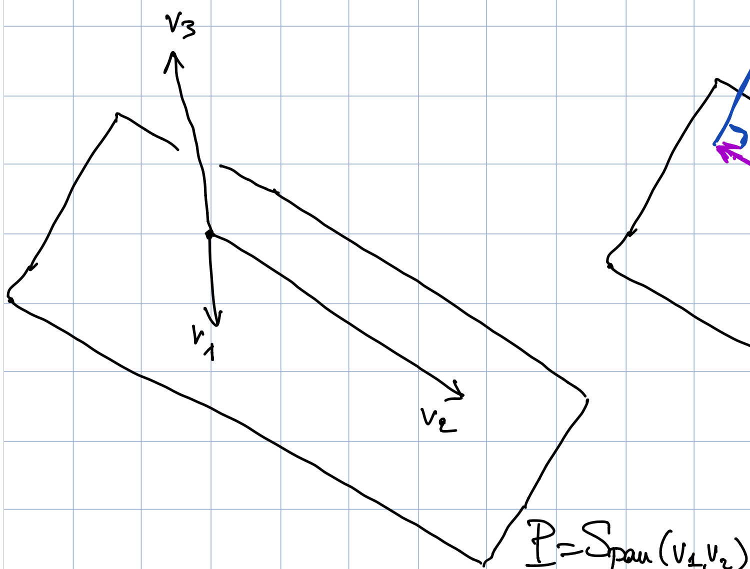
$$z_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}|u_i\rangle\cdot u_i \qquad u_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{\|z_{k+1}\|}.$$

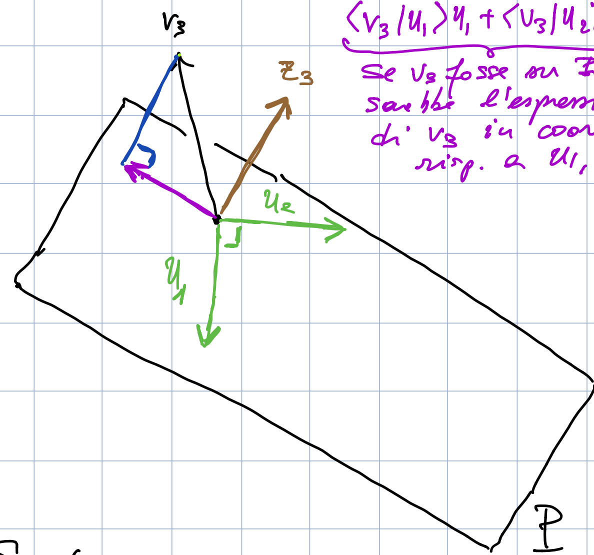
In $\mathbb{R}^3$ abbiamo base v_1, v_2, v_3

Costruiti u_1, u_2 base ortonormale di $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$

costruisco u_3 scegliendo $z_3 = v_3 - \langle v_3|u_1\rangle\cdot u_1 - \langle v_3|u_2\rangle\cdot u_2$

e poi normalizzo.





$\underbrace{\langle v_3 | u_1 \rangle u_1 + \langle v_3 | u_2 \rangle \cdot u_2}$

se v_3 fosse su P sarebbe l'espressione di v_3 in coord $*$ risp. a u_1, u_2

$*$ è il vettore su P più vicino a v_3, i.e. la proiez. ortog. su P

$\Rightarrow v_3 -$ lui è $\perp$ a P

<u>Esempio</u>: $\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}} \; \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}}$ base di $\mathbb{R}^2$: ortonormalizzo:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{9+4} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \middle| \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{1}{13} \left(4 \cdot 3 + 7 \cdot (-2)\right) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{2}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 13 \cdot 7 + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 58 \\ 87 \end{pmatrix}$$

<u>deve</u> essere ortog a $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$3 \cdot 58 - 2 \cdot 87 = 174 - 174 = 0$ ✓

$$= \frac{29}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} = \frac{\frac{29}{13}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{\left\|\frac{29}{13}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\|} = \frac{\cancel{\frac{29}{13}}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{\cancel{\frac{29}{13}}\cdot\left\|\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

<u>Esempio</u>: $v_1 = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ base di $\mathbb{R}^3$.

Ortonormalizzo:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$z_2 = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} - \left\langle\begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} - \frac{2-4-6}{14}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} + \frac{4}{7}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}7+8\\28-4\\-14+12\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}15\\24\\-2\end{pmatrix}$$

<u>deve</u> essere $\perp$ a v_1: $2\cdot15+(-1)\cdot24+3\cdot(-2) = 30-24-6=0$ ✓

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{225+576+4}}\cdot\begin{pmatrix}15\\24\\-2\end{pmatrix}$$

$$z_3 = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} - \left\langle\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\frac{1}{14}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$- \left\langle\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}15\\24\\-2\end{pmatrix}\right\rangle\cdot\frac{1}{805}\begin{pmatrix}15\\24\\-2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{6-1-3}{14}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} - \frac{45+24+2}{805}\begin{pmatrix}15\\24\\-2\end{pmatrix}$$

$= \dots = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$ dove essere $\perp$ a $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

DOMANI: Slavich
VEN: io

Dimostrazione che Gram-Schmidt funziona:

$$z_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1} | u_i \rangle \cdot u_i \qquad u_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{\| z_{k+1} \|}.$$

Dimostro induttivamente che: costruiti $u_1, \dots, u_k$ che sono base ortonormale di $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$ le formule prec. per z_{k+1} dà

1) $z_{k+1} \neq 0$
2) $z_{k+1} \perp u_1, \dots, u_k$
3) $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k, z_{k+1}) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k+1})$

Fatto questo ok: normalizzando z_{k+1} ottengo base ortonormale $u_1, \dots, u_{k+1}$ di $\mathrm{Span}(v_1, \dots v_{k+1})$

$$z_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1} | u_i \rangle \cdot u_i$$

1) $v_{k+1} \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k) \Rightarrow z_{k+1} \neq 0$

2) $1 \leq j \leq k$, $\langle z_{k+1} | u_j \rangle = \langle z_{k+1} | u_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle z_{k+1} | u_i \rangle \cdot \underbrace{\langle u_i | u_j \rangle}_{\delta_{ij}}$

$= \langle z_{k+1} | u_j \rangle - \langle z_{k+1} | u_j \rangle = 0$

3) $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_k, z_{k+1})$
$= \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$

infatti z_{k+1} è v_{k+1}
+ vettore generato dai precedenti.