UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 14/2/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Trovare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[3e_1 + 11e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $[-19e_1 + 4e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Se U e W sono sottospazi di $\{z \in \mathbb{C}^{13} : z_{12} = (1-i)z_2 + 7z_9\}$ di dimensioni rispettive 8 e 9, che dimensione può avere $U \cap W$?

3. Se $f : \{x \in \mathbb{R}^7 : \ 2x_3 - 5x_7 = 0\} \to \mathbb{R}^{10}$ è lineare e $f(5e_3 + 2e_7) = f(e_1 + 2e_6)$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

4. Risolvere $\begin{cases} 5x - y + 2z = 8 \\ -3x + 2y + z = -15 \\ x - 2y + 4z = -11. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{32}$.

6. Data $A = (v_1, v_2) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ tale che $\det(A) = i$,
calcolare $\det((1-i)v_1 + 2v_2, 3iv_1 + (2-i)v_2)$.

7. Dati $X = \mathrm{Span}(3e_1 + e_2 - e_3, 2e_1 + 4e_2 + e_3)$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 + 3e_2 - 4e_3)$,
calcolare la proiezione su X di $7e_1 - 5e_2 + 3e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 14/2/19 — Esercizî

1. Considerare lo spazio $V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[t] : \ p(-2) = 0\}$.

(A) (4 punti) Elencare tutti gli elementi di V che sono somma di due monomi con coefficienti interi primi fra loro, di cui positivo quello del monomio di grado più basso.

(B) (4 punti) Ordinare i polinomi così trovati in modo che sia crescente il loro valore in $t = -1$, e a parità di tale valore che sia decrescente il grado, quindi estrarre dai polinomi così ordinati una base $\mathcal{B}$ di V.

(C) (4 punti) Provare che $v = 12 + 8t - 9t^2 - 5t^3$ appartiene a V e trovare $[v]_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio X_t di equazioni

$$\begin{cases} (t+1)x_1 + (4-3t)x_2 + (4t-3)x_3 + (1-6t)x_4 = 0 \\ (t-8)x_1 + (t-2)x_2 - tx_3 + (t+4)x_4 = 0. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Trovare una base di X_t per $t = -2$.

(B) (4 punti) Determinare il valore di t per il quale X_t non ha dimensione 2, e trovarne una base per tale valore.

(C) (4 punti) Stabilire per quali t si ha che X_t ha intersezione non banale con $\mathrm{Span}(e_1 - 3e_2 + e_4,\ e_1 - 4e_2 - e_3)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Tra 5 e 8 compresi

3. Tra 1 e 6 compresi

4. $x = 3,\ y = -1,\ z = -4$

5. $\frac{1}{3}$

6. $9 + i$

7. $11e_1 + e_2 - 5e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) $4t - t^3,\ 2t + t^2,\ 2t^2 + t^3,\ 2 + t,\ 4 - t^2,\ 8 + t^3$

(B) L'ordine è il precedente. Bisogna tenere primo, secondo e quarto polinomio

(C) $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(B) $t = 6$; $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(C) $t = 4$ e $t = 6$