Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 8/1/19 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 3 vettori linearmente indipendenti in $\{p(z) \in \mathbb{C}_{\leqslant 7}[z] : \ p''(-i) = 0\}$,
quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

2. Se $f : \mathbb{R}^8 \to \{x \in \mathbb{R}^4 : \ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0\}$ è lineare surgettiva,
che dimensione ha il suo nucleo?

3. Se $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è tale che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, quanto fa $f\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix}$?

4. Per $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{21}$.

5. In una matrice $A \in \mathcal{M}_{4\times 6}(\mathbb{R})$ è data una sottomatrice $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Calcolare il rapporto tra il numero di orlate di B in A e il numero di tutte le sottomatrici 3×3 di A.

6. Risolvere $6z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 7i = 0$.

7. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 7x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + 2e_2 - e_3)$, calcolare la proiezione su X di $3e_1 - 5e_2 + 6e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 8/1/19 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazi X di equazione $3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ e Y generato da $-2e_1 + 4e_2 + e_3 + 7e_4$, nonché il vettore $v = 2e_1 + 5e_2 - e_3 + e_4$.

(A) (2 punti) Esibire tutti i vettori di X con due coordinate nulle e le altre due intere e prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(B) (3 punti) Ordinare i vettori del punto precedente in modo che sia crescente il prodotto delle coordinate non nulle, quindi estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di X.

(C) (3 punti) Provare che v appartiene a X e determinare $[v]_{\mathcal{B}}$.

(D) (4 punti) Provare che $X \oplus Y = \mathbb{R}^4$ ed esibire la matrice M della proiezione su X associata a tale decomposizione.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + (t+2)y - 4z + w = t \\ -tx + y + (t-1)z - 7w = 1 \\ x + (4t-1)y - 6z + (1-2t)w = t+4. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Risolvere il sistema per $t = 0$.

(B) (4 punti) Sapendo che esiste un unico valore t_0 di t per il quale la matrice incompleta del sistema ha rango 2, trovare tale t_0.

(C) (4 punti) Risolvere il sistema per $t = t_0$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. 4

2. 5

3. $\begin{pmatrix} 10 \\ -31 \end{pmatrix}$

4. $-\frac{9}{5}$

5. $\frac{1}{10}$

6. $z_1 = 1 - \frac{i}{2},\ z_2 = i - \frac{1}{3}$

7. $\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ -4 \end{pmatrix}$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(B) L'ordine è il precedente; bisogna tenere primo, secondo e quarto vettore

(C) v soddisfa l'equazione che definisce X; $[v]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}$

(D) X ha dimensione 3, Y ha dimensione 1, il generatore di Y non appartiene a X, e $3+1=4$;

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 & -2 \\ 12 & -3 & 8 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ 21 & -7 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

2.

(A) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 39 \\ -19 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$

(B) $t_0 = 3$

(C) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -36 \\ 11 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}\right)$