UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 30/1/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Calcolare polinomio caratteristico e autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -7 & -8 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} -2t^2+2t+5 & 2t^2-t-3 \\ -3t^2+2t+5 & 3t^2-t-3 \end{pmatrix}$ sia diagonalizzabile.

3. Trovare i vettori di $\mathbb{R}^2$ ortogonali a $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ rispetto a $\langle\,.\,|\,.\,\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Descrivere l'azione di una matrice $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $\det(A) = -1$ e $\mathrm{tr}(A) = 0$.

5. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica $(3-t)x^2 + 2(7+t)xy + (7-2t)y^2 + 4tx - 6y + 1 = 0$ sia una parabola.

6. Determinare i punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che sono punti all'infinito del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ di equazione $2x^3 - x^2y - 5xy^2 - 2y^3 + 7x^2 - 4xy + y^2 - 8x + 3y + 1 = 0$.

7. Calcolare $\int\limits_\alpha \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1-2t \\ t^2-t \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 30/1/18 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 3k^2+4k+9 & 6k^2+12k-18 \\ -k-3 & k^2-3k+6 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Calcolare la traccia e il determinante di A.

(B) (3 punti) Sapendo che gli autovalori di A si possono esprimere entrambi come ak^2+bk+c con a, b, c interi, trovare tali autovalori.

(C) (3 punti) Stabilire per quali k gli autovalori di A non sono distinti.

(D) (3 punti) Stabilire per quali k la A è diagonalizzabile.

2. Considerare la curva orientata $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s^2+\sin(2s) \\ s-\cos(s) \\ s^3+s^2-s+1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.

(C) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ dove β è la restrizione di α a $[-\pi, \pi]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. $\diamondsuit$

1. $t^3 - 7t^2 + 16t - 12;\ 2,\ 3$

2. $t \neq 2$

3. I multipli di $\begin{pmatrix} 18 \\ -5 \end{pmatrix}$

4. Rotazione intorno a una retta ℓ di $\frac{\pi}{3}$ e riflessione rispetto a $\ell^\perp$

5. $t = 28$

6. $[2:1],\ [-1:2],\ [-1:1]$

7. $-\pi$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) $\mathrm{tr}(A) = 4k^2 + k + 15$, $\det(A) = 3k^4 + k^3 + 45k^2 + 15k$

(B) $3k^2 + k,\ k^2 + 15$

(C) $k = -3,\ k = \frac{5}{2}$

(D) $k \neq \frac{5}{2}$

2.

(A) La derivata della seconda componente di α è sempre non negativa, e nulla solo per $s = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Dunque tale componente è crescente, onde α è semplice. Inoltre in $s = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ non si annullano le derivate delle altre componenti, dunque α è regolare

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $n = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $b = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{1}{12}\sqrt{30},\ \tau = -\frac{8}{15}$

(D) $2\pi^3$