UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/2/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $A \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$ e $p_A(t) = (t-1)^2(t-i)(t-3i)^2$, possono esistere $u, v \in \mathbb{C}^5$ linearmente indipendenti tali che $A \cdot u = i \cdot u$ e $A \cdot v = i \cdot v$? Spiegare.

2. Stabilire per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 3-2iz & z^2-i \\ z+iz & \pi \end{pmatrix}$ è coniugata tramite una unitaria a una matrice diagonale reale.

3. Per quali $t \in \mathbb{R}$ i punti $[t-1 : -8 : t-3]$ e $[2t+1 : 1-3t : 10]$ coincidono in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

4. Determinare il tipo affine della quadrica $-3y^2 + 3z^2 - 6xy + 6xz - 4y + 2z = 0$.

5. Calcolare la curvatura nel punto $t = 0$ della curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) + t^2 - 2t \\ \cos(3t) + 5t^2 + t \end{pmatrix}$.

6. Calcolare $\int_\alpha (2xy\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 1 \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}$.

7. Calcolare $\int_{\partial Q} (y + \ln(2 + x^3))\,\mathrm{d}x - (x + \sin(1 - y^2))\,\mathrm{d}y$ con $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/2/18 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} -6 & k+4 & -1 \\ k^2-9 & 9-k^2 & k-3 \\ k^2-9 & -2k^2+k+12 & k^2-6 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $\det(A) = -k^5 + 4k^4 + 3k^3 - 21k^2 + 27$.

(B) (3 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore $k^2 - k - 3$, trovare gli altri due.

(C) (3 punti) Al variare di k determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di A.

(D) (3 punti) Al variare di k determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di A, stabilendo se A sia diagonalizzabile o meno.

2. Considerare $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(A) (4 punti) Provare che se M è normale allora lo è anche $\alpha M + \beta \mathrm{I}_n$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(B) (4 punti) Usare il punto precedente per esibire matrici normali che non sono multiple numeriche né di unitarie, né di hermitiane, né di antihermitiane.

(C) (4 punti) Provare che $M = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ è normale, quindi trovare gli autovalori di $iM + 3\mathrm{I}_2$ e una base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ che la diagonalizza.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. No: l'autovalore i avrebbe molteplicità geometrica almeno 2, mentre ha molteplicità algebrica 1

2. $z = i$

3. $t = 7$

4. Paraboloide iperbolico

5. $-\frac{3}{4}\sqrt{2}$

6. $-\frac{1}{10}$

7. -2

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) I seguenti passaggi provano che $\det(A) = (k-3)(k^2-k-3)(3-k^2)$, dopo di che basta sviluppare il prodotto:

- Sosituire la terza riga con sé stessa meno la seconda
- Raccogliere $k-3$ dalla seconda riga e k^2-k-3 dalla terza
- Sostituire la seconda colonna con sé stessa più la prima
- Sostituire la terza colonna con sé stessa più la seconda
- Sviluppare lungo la terza riga

(B) $k-3$ e $3-k^2$

(C) Per $k=-3$ autovalori 9 e -6 con m.a. 1 e 2
Per $k=-3/2$ autovalori $-9/2$ e $3/4$ con m.a. 1 e 2
Per $k=0$ autovalori 3 e -3 con m.a. 1 e 2
Per $k=2$ autovalore -1 con m.a. 3
Altrimenti autovalori $k^2-k-3,\ k-3$ e $3-k^2$ con m.a. 1

(D) Per $k=-3$ autovalori 9 e -6 con m.g. 1 e 2; diagonalizzabile
Per $k=-3/2$ autovalori $-9/2$ e $3/4$ con m.g. 1; non diagonalizzabile
Per $k=0$ autovalori 3 e -3 con m.g. 1 e 2; diagonalizzabile
Per $k=2$ autovalore -1 con m.g. 2; non diagonalizzabile
Altrimenti autovalori $k^2-k-3,\ k-3$ e $3-k^2$ con m.g. 1; diagonalizzabile

2.

(A) Sapendo che $M^* \cdot M = M \cdot M*$, è facile vedere che lo stesso accade per $\alpha M + \beta \mathrm{I}_n$. Oppure si ricorda che una matrice è normale se e solo se ammette una base ortonormale di autovettori, e si nota che una base ortonormale di autovettori per M lo è anche per $\alpha M + \beta \mathrm{I}_n$

(B) Ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + i\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -1 & i \end{pmatrix}$ è normale poiché $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ è hermitiana, ma

- non è multipla numerica di una unitaria perché le colonne hanno norma diversa tra loro perché
- non è multipla numerica di una hermitiana perché nessuna sua multipla numerica ha valori reali sulla diagonale principale
- non è multipla numerica di una antihermitiana perché nessuna sua multipla numerica ha valori immaginari puri sulla diagonale principale

(C) È il doppio di una unitaria (anzi, ortogonale); $\lambda_1 = 4 + i\sqrt{3}$, $\lambda_2 = 2 + i\sqrt{3}$;
$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

---

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$
