Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 9/1/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $p_A(t) = (t-3)^2(t+5)$ si può concludere che non esiste alcun $v \in \mathbb{R}^3$ tale che $v \neq 0$ e $A \cdot v = -2v$? Spiegare.

2. Provare che $\begin{pmatrix} 5+i & -5i \\ 1-3i & -3 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ ortogonali a $\begin{pmatrix} 2+i \\ 3i \end{pmatrix}$, unitarî e con somma delle componenti immaginaria pura.

4. Trovare $a \in \mathbb{R}$ tale che esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale con
$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Determinare il tipo affine della quadrica $4y^2 + 3z^2 - 6xy - 2xz + 2yz + 2x - 2y + 4z = 0$.

6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[1-t : 3 : -1]$ e $[5 : -2 : 1+t]$ contiene il punto $[7 : 8 : 2]$.

7. Stabilire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la forma $x^2y^6 \cos(x^3y^7)\,(ay\,\mathrm{d}x + 7x\,\mathrm{d}y) - x^7y^4 \sin(x^8y^5)\,(8y\,\mathrm{d}x + bx\,\mathrm{d}y)$ è chiusa.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, definire $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ come le proiezioni ortogonali sulle rette generate rispettivamente da v e da w, e porre $h = f + g$.

(A) (3 punti) Esplicitare la matrice di h rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ in partenza e in arrivo.

(B) (3 punti) Provare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di h. *(Suggerimento: **non** usare il punto (A).)*

(C) (3 punti) Provare che h ha l'autovalore 0 ed esibire un relativo autovettore. *(Suggerimento: **non** usare il punto (A).)*

(D) (3 punti) Esplicitare gli altri autovalori di h. *(Suggerimento: **non** usare il punto (A).)*

2. Considerare la curva orientata $\alpha : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t^2 - t + 1 \\ -t^2 + 3t + 2 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Calcolare $\int_\alpha (2y \, \mathrm{d}x - 3x \, \mathrm{d}y)$.

(B) (4 punti) Calcolare $\int_\alpha (2x + 4y - 15)$.

(C) (4 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $t = 0$.

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. Sì: se v esistesse, A avrebbe l'autovalore -2, dunque $p_A(-2)$ si annullerebbe, invece vale 75

2. Ha gli autovalori distinti 2 e i

3. $\pm\frac{1}{2\sqrt{7}}\begin{pmatrix} -3+3i \\ 3+i \end{pmatrix}$

4. $a = \pm 5\sqrt{2}$

5. Iperboloide iperbolico (a una falda)

6. $t = -5$ e $t = \frac{15}{8}$

7. $a = 3,\ b = 5$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli eserciziî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) $\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 26 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & 12 \\ 1 & 12 & 17 \end{pmatrix}$

(B) h è somma di due applicazioni autoaggiunte, dunque è autoaggiunta, dunque è rappresentata da una matrice simmetrica.

(C) Se $u = v \wedge w = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ si ha $f(u) = g(u) = 0$, dunque $h(u) = 0$

(D) $\frac{25}{26}$, $\frac{27}{26}$

2.

(A) $-\frac{74}{3}$

(B) $\frac{5}{3}\left(\sqrt{10} - 25\sqrt{2}\right)$

(C) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$