UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 30/1/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 14 generatori di $\{x \in \mathbb{R}^{11} : 5x_1 + 7x_4 = 2x_8 + 3x_{11}\}$, quanti bisogna scartarne per ottenere una base?

2. Data la base $\mathcal{B} = (e_1 + 2e_2 + 2e_3,\ 2e_1 - e_2 + e_3)$ di $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}$, trovare $[-4e_1 + 7e_2 + e_3]_{\mathcal{B}}$.

3. Se $X \subset \mathbb{C}^8$ è un sottospazio di dimensione 3 e $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^8$ è lineare tale che $X \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

4. Risolvere $\begin{cases} 3x - 2y + z = 11 \\ 2x + 5y - 3z = -8 \\ 4x + y - 2z = 7. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{23}$.

6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ i vettori $3e_1 + (t+2)e_2 - 2e_3,\ 5e_1 - e_2 + (2t-1)e_3,\ e_1 + (4t+1)e_2 - 7e_3$ siano linearmente dipendenti.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(3e_1 - 4e_2 + e_3)$ trovare la matrice A (rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo) della proiezione di $\mathbb{R}^3$ su X rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$, provando che soddisfa la proprietà caratterizzante delle proiezioni.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 30/1/18 — Esercizî

1. Considerare $X = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[t] : \ 3p(-1) - p'(1) = 0\}$,
$\mathcal{B} = (1 + t + 7t^2 + t^3, \ 2 + t + 4t^2 + t^3, \ -1 + 2t + 5t^2 - t^3$ e $A_k = \begin{pmatrix} 4 & 3 & k+1 \\ k-2 & 1 & -4 \\ 10 & 8 & 4k+3 \end{pmatrix}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(A) (2 punti) Provare che $\mathcal{B}$ è una base di X.

Definire ora $f_k : X \to X$ come l'applicazione lineare tale che $[f_k]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = A_k$.

(B) (3 punti) Determinare i valori di k per i quali f_k non è iniettiva, verificando in particolare che ciò accade per un solo valore intero k_0.

(C) (3 punti) Trovare una base del nucleo di f_{k_0}, cioè di f_k per $k = k_0$.

(D) (4 punti) Provare che $-1 + 3t + 15t^2$ appartiene a X e calcolare la sua immagine tramite $f_{(-2)}$, cioè tramite f_k per $k = -2$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ i sottospazî affini

$$E_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} t+5 \\ t-9 \\ 5t-1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t-5 \\ 8-7t \\ 9 \\ t-2 \end{pmatrix} \right),$$

$$F_s : \begin{cases} x_1 + (s+5)x_2 + (s+3)x_3 + x_4 = 1 - s \\ (s+2)x_1 + x_3 + (s+4)x_4 = -2. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Trovare $t_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0, n \in \mathbb{N}$ tali che E_t ha dimensione n_0 per $t = t_0$ e dimensione n per $t \neq t_0$.

(B) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_t per $t = 2$ e per $t = t_0$.

(C) (2 punti) Provare che F_s ha sempre dimensione 2.

(D) (4 punti) Descrivere $F_{(-3)} \cap E_2$ ed $F_{(-3)} + E_2$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. 4

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. Tra 2 e 7 compresi

4. $x = 2,\ y = -3,\ z = -1$

5. $\frac{1}{3}$

6. $t = 2$ e $t = -\frac{20}{11}$

7. $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 8 & 5 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^2 = A$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) X ha dimensione 3 e $\mathcal{B}$ contiene tre vettori linearmente indipendenti di X

(B) $k_0 = 4,\ k = -\frac{3}{4}$

(C) $37 + 5t - 25t^2 + 11t^3$

(D) $-29 + 5t + 11t^2 - 16t^3$

2.

(A) $t_0 = -1,\ n_0 = 1,\ n = 2$

(B) $\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 7x_3 = 21 \\ 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_4 = 3 \\ x_2 + 5x_4 = -6 \\ x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$

(C) La matrice incompleta del sistema che definisce F_s ha sempre rango 2

(D) Una retta e un sottospazio affine di dimensione 3.