UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 26/6/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Sapendo che un predicato $\mathcal{P}(n)$ relativo a $n \in \mathbb{N}$ è vero per $n = 0$ e che $\mathcal{P}(n+1)$ implica $\mathcal{P}(n)$, si conclude che $\mathcal{P}(n)$ è sempre vera? Dimostrare che è vero oppure fare un esempio in cui non lo è.

2. Trovare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[-5e_1 + 12e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

3. Se $X = \{x \in \mathbb{R}^8 :\ 7x_1 = 8x_3\}$ e $f : \mathbb{R}^4 \to X$ è lineare iniettiva,
che dimensione può avere un sottospazio Y di X tale che $X \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$?

4. Risolvere $\begin{cases} 3x + 2y - z = 9 \\ 5x + 7y + 3z = 2 \\ x - 3y - 5z = 16. \end{cases}$

5. Dire per quali t la matrice $\begin{pmatrix} 2-t & 1+t \\ t-4 & 3+t \end{pmatrix}^{-1}$ ha traccia $\frac{1}{2}$.

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Dati $X = \mathrm{Span}(3e_1 + e_2,\ 2e_1 + e_3)$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4,\ 3e_1 + 2e_2 + e_4)$
trovare la proiezione su X di $12e_1 + 5e_2 + 2e_3 + 3e_4$ rispetto alla decomposizione $X \oplus Y = \mathbb{R}^4$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. In $\mathbb{R}^3$ al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare i sottospazî affini

$$E_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \\ 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+3t \\ 4t+3 \\ 1-2t \end{pmatrix}\right), \quad F_s : \begin{cases} x + sy + (s-1)z = 3 \\ sx + y - sz = s + 2. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Calcolare la dimensione di E_t al variare di t, esibendone equazioni cartesiane quando non è un piano.

(B) (4 punti) Provare che F_s è sempre una retta, esibendone equazioni parametriche per $s = -1$

(C) (4 punti) Discutere la posizione reciproca di E_1 ed F_s al variare di s.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio $X : \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

(A) (3 punti) Esibire tutti i vettori di X con una coordinata nulla e le altre intere prime fra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(B) (3 punti) Provare che scelti comunque due dei vettori del punto (A) si ottiene una base di X.

Ordinare ora i vettori del punto (A) in modo che sia crescente la somma dei valori assoluti delle coordinate, ed estrarre dai vettori così ordinati una base $\mathcal{B}$ di X, definendo poi l'applicazione lineare $f : X \to X$ tale che $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

(C) (3 punti) Provare che f è invertibile.

(D) (3 punti) Provare che $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene a X e calcolare $f(x)$.

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. No: $\mathcal{P}(n) =$ "$n \leqslant 0$"

2. $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3. Tra 0 e 3 compresi

4. $\begin{cases} x = 3 + 13t \\ t = -1 - 14t \\ z = -2 + 11t \end{cases}$

5. $t = 0$ e $t = 1$

6. 6

7. $-e_1 - 3e_2 + 4e_3$

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♡

1.

(A) Dimensione 2 per $t \neq 3$, dimensione 1 per $t = 3$; equazioni $\begin{cases} x + 2z = -3 \\ y + 3z = -3 \end{cases}$

(B) La matrice del sistema che definisce F_s ha sempre rango 2

$$F_{(-1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(C) Piano e retta paralleli per $s = -1$ e $s = 2$, altrimenti incidenti in un punto

2.

(A) $\begin{pmatrix} 5 \\ -26 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 37 \\ 0 \\ 1 \\ -26 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 37 \\ 13 \\ -5 \end{pmatrix}$

(B) X ha dimensione 2 e i vettori sono a coppie linearmente indipendenti

(C) $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ è invertibile, dunque f lo è

(D) $[x]_{\mathcal{B}} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $f(x) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 17 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$