UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 11/9/18 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^4$ sono sottospazî di dimensione 3 tali che $X_1 + X_2 = \mathbb{R}^4$ e sono date loro basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, è sempre vero che prendendo due vettori a caso da $\mathcal{B}_1$ e due da $\mathcal{B}_2$ si ottiene una base di $\mathbb{R}^4$? Spiegare.

2. Data la base $\mathcal{B} = (2e_1 - e_2 + e_3,\ -e_1 + 3e_2 + e_3)$ di $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}$, calcolare $[5e_1 + 15e_2 + 13e_3]_{\mathcal{B}}$.

3. Se $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^5$ e $g : \mathbb{C}^9 \to \mathbb{C}^5$ sono lineari e $\mathbb{C}^5 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$, cosa si può dire delle dimensioni di $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Ker}(g)$?

4. Risolvere $\begin{cases} 7x - 3y + 4z = 1 \\ 2x + y - 5z = 2 \\ 3x - 5y + 14z = 0. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ calcolare $\left(A^{-1}\right)_{2\,1}$.

6. Dire per quali $t \in \mathbb{R}$ le colonne di $\begin{pmatrix} -3 & t+1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 9 & 1 & 3t-1 \end{pmatrix}$ sono linearmente dipendenti.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + 2e_2 + e_3)$ calcolare la proiezione su X di $4e_1 + e_2 - 3e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio

$$X_t : \begin{cases} (t-1)x + 2(1-t)y + (t+7)z - 4tw = 0 \\ (2-t)x + (t+1)y + (1-2t)z + (2t+5)w = 0. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Esibire equazioni parametriche di X_0.

(B) (4 punti) Trovare il valore T di t per il quale X_t non ha dimensione 2.

(C) (4 punti) Esibire equazioni parametriche di X_T.

2. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_2 = 18x_1 - 29x_3\}$ e $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -10 & 0 & 19 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Provare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ è una base di X.

(B) (4 punti) Provare che l'espressione $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione $f : X \to X$ lineare.

(C) (4 punti) Trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. No: se $\mathcal{B}_1 = \text{Span}(e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{B}_2 = (e_1, e_2, e_4)$ prendendo i primi due vettori di ciascuna non si ottiene una base di $\mathbb{R}^4$

2. $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. La loro somma fa 11

4. Impossibile

5. $-\frac{1}{2}$

6. $t = -5$ e $t = -\frac{5}{3}$

7. $8e_1 + 9e_2 + e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli eserciziî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) $X_0 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(B) $T = 5$

(C) $X_5 = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$

2.

(A) X ha dimensione 2 e $\mathcal{B}$ consiste di due vettori linearmente indipendenti cha appartengono a X

(B) Posto $\omega = (18, -1, -29)$ si ha $\omega \cdot A = 19\omega$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$