UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 30/1/17 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Per una $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ si ha $\mathrm{tr}(A) = -5$, $\det(A) = 7$, $p_A(2) = -1$. Trovare $p_A(t)$.

2. Posto $v = 2e_1 + e_2 + e_3$ e $w = e_1 + 3e_2 - 5e_3$, per una $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale si ha $M \cdot v = -v$. Quanto possono valere $\langle M \cdot w | v\rangle$ e $\langle M \cdot w | w\rangle$?

3. Per quali $z \in \mathbb{C}$ i punti $[3 - i : z]$ e $[1 + 2i : 4 + i]$ coincidono in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$?

4. Determinare il tipo affine della quadrica $y^2 - z^2 - 2xy + 2xz + \frac{2}{3}z = 0$.

5. Data $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ con $\alpha(t) = (t^3 + t, t^2, t^2 - t)$ calcolare $\int_\alpha (9x - 2y + 2z - 1)$.

6. Data $\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ con $\alpha(t) = (t \cdot \cos(t), t^2)$ calcolare $\int_\alpha y \, \mathrm{d}x$.

7. Per quali $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ è chiusa la forma $\left(\frac{\alpha}{5x-4y} + \frac{2}{x}\right) \mathrm{d}x + \left(-\frac{4}{5x-4y} + \frac{\beta}{y}\right) \mathrm{d}y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

IN SUPREMÆ DIGNITATIS · 1343 ·

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 30/1/17 — Esercizî

1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_t = \begin{pmatrix} |t| & t^2-3 \\ t+3 & t^2-1 \end{pmatrix}$ e la forma bilineare $\langle\,.\,|\,.\,\rangle_{A_t}$.

(A) (1 punti) Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ tale forma sia simmetrica.

(B) (2 punti) Provare che esiste un unico valore t_0 di t per il quale tale forma è un prodotto scalare.

Sia d'ora in poi $\langle\,.\,|\,.\,\rangle = \langle\,.\,|\,.\,\rangle_{A_{t_0}}$ per il valore t_0 appena trovato.

(C) (3 punti) Trovare i vettori ortogonali a $5e_1 - 2e_2$ rispetto a $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$.

(D) (3 punti) Ortonormalizzare rispetto a $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ la base $(e_1+e_2, 2e_1+3e_2)$ di $\mathbb{R}^2$.

(E) (3 punti) Trovare la proiezione ortogonale rispetto a $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ di $e_1 - 13e_2$ sul generato di $2e_1 - 3e_2$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_t = \begin{pmatrix} t^2+4 & -t^2+2t-1 & t^2-2t+1 \\ t-2 & 6 & 3t-4 \\ t-2 & 2-t & 4t \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A_t) = 3t^4 + 14t^3 + 20t^2 + 56t + 32$.

(B) (2 punti) Sapendo che $p_{A_t}(-1) = -3t^4 - 18t^3 - 30t^2 - 90t - 75$ determinare $p_{A_t}(\lambda)$.

(C) (3 punti) Sapendo che A_t ha sempre l'autovalore t^2+4 trovare gli altri due.

(D) (2 punti) Al variare di t determinare la molteplicità algebrica degli autovalori di A_t.

(E) (3 punti) Al variare di t determinare la molteplicità geometrica degli autovalori di A_t, stabilendo se essa sia o meno diagonalizzabile.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. $t^3 + 5t^2 - 11t - 7$

2. $\langle M \cdot w | v \rangle = 0$; $\langle M \cdot w | w \rangle$ può assumere qualsiasi valore in $[-35, 35]$

3. $z = \frac{1}{5}(11 - 27i)$

4. Paraboloide iperbolico

5. $\frac{7}{2}\sqrt{21} - \frac{1}{3}\sqrt{2}$

6. $\pi\,(4 - \pi^2)$

7. $\alpha = 5$, qualsiasi β

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. $\diamondsuit$

1.

(A) $t = 3$ e $t = -2$

(B) $t_0 = -2$

(C) $\mathrm{Span}(e_1 + 8e_2)$

(D) $\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

(E) $8e_1 - 12e_2$

2.

(A) Sostituendo la terza colonna con sé stessa più la seconda e poi la terza riga con sé stessa meno la seconda si trova $\det(A_t) = (3t+2)(t^2+4)(t+4)$ e si conclude eseguendo il prodotto

(B) $\lambda^3 - (t^2+4t+10)\lambda^2 + (4t^3+9t^2+30t+32)\lambda - (3t^4+14t^3+20t^2+56t+32)$

(C) $3t+2$ e $t+4$

(D) Per $t \neq 0, 1, 2$ autovalori $t^2+4, 3t+2, t+4$
per $t = 0$ autovalori $2, 4, 4$
per $t = 1$ autovalori $5, 5, 5$
per $t = 2$ autovalori $6, 8, 8$

(E) Per $t \neq 0, 1, 2$ diagonalizzabile
per $t = 0$ m.g.$(4) = 1$, non diagonalizzabile
per $t = 1$ m.g.$(5) = 2$, non diagonalizzabile
per $t = 2$ m.g.$(8) = 2$, diagonalizzabile