Algebra Lineare 30/4/16

<u>Teorema</u> (Ruffini): se $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ ha la radice z_0 allora $p(z)$ è divisibile per $z - z_0$.

<u>Dim</u>: eseguo $p(z) : (z - z_0)$, trovo

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0) + r(z)$$

con $\deg(r(z)) < \deg(z - z_0) = 1$

$\Longrightarrow \ r(z) = r \in \mathbb{C}$.

Sostituisco z con z_0 in $p(z) = q(z) \cdot (z - z_0) + r$ trovando

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{p(z_0)} = q(z_0) \cdot \underbrace{(z_0 - z_0)}_{0} + r$$

$\Longrightarrow \ r = 0 \ \Longrightarrow \ p(z) = q(z) \cdot (z - z_0)$. $\blacksquare$

Se z_0 è una radice di $p(z)$ ho

$$p(z) = p_1(z)\cdot(z-z_0) \text{ ; due casi } \begin{cases} \Rightarrow p_1(z_0) \neq 0 \quad \text{stop} \\ \Rightarrow p_1(z_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow p_1(z_0) = p_2(z)\cdot(z-z_0)$$

$$\Longrightarrow p(z) = p_2(z)\cdot(z-z_0)^2$$

$$\text{due casi } \begin{cases} \Rightarrow p_2(z_0) \neq 0 \quad \text{stop} \\ \Rightarrow p_2(z_0) = 0 \Longrightarrow \dots \Longrightarrow p(z) = p_3(z)\cdot(z-z_0)^3 \end{cases}$$

Avanti così finché non mi fermo

$$\deg(p(z)) > \deg(p_1(z)) > \deg(p_2(z)) > \dots$$

dunque mi fermo, trovando

$$p(z) = q(z) \cdot (z - z_0)^k \qquad q(z_0) \neq 0$$

Tale k è detto molteplicità di z_0 come radice di $p(z)$.

Def: la molteplicità di z_0 come radice di $p(z)$ è il più grande k t.c. $(z-z_0)^k$ divide $p(z)$.

Teo fond. algebra: ogni $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ non costante ammette radici.

Cor: se $\deg(p(z)) = n$ allora $p(z)$ ha esattamente n radici contate con la loro molteplicità.

Dim: Per induzione su $n \geq 1$. Per $n = 1$

$p(z) = az + b \Rightarrow$ unica radice $z = -b/a$. OK

P.I.: TFA $\Rightarrow$ c'è una radice z_0

$\Rightarrow p(z) = (z - z_0) \cdot q(z)$.

Ip. ind. $q(z)$ ha $n-1$ radici contate con la molteplicità; se z_0 è radice di $q(z)$, lo è di $p(z)$ con molt. di 1 superiore ✓

altrimenti $\bar{z}$ di molt. 1 per $p(z)$. ✓ $\boxtimes$

Es: per $p(z) = az^2 + bz + c$ le radici sono

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

$\pm\sqrt{\Delta}$ = le due radici quadrate complesse.

Es: $6iz^2 + (1-11i)z + 7-9i$

$$\Delta = (1-11i)^2 - 4(6i)(7-9i)$$

$$= 1 - 22i - 121 - 168i - 216$$

$$= -336 - 190i$$

Cerchiamo le radici $\pm(a+ib)$, cioè

$$a^2 + 2abi - b^2 = -84 - 190i \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -336 \\ ab = -95 \end{cases}$$

$$a = 5 \qquad b = -19 \qquad 19^2 - 5^2 = 361 - 25 = 336$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1+11i \pm (5-19i)}{12i} = \begin{cases} \dfrac{4-8i}{12i} = -\dfrac{1}{3}(2+i) \\ \dfrac{-6+30i}{12i} = \dfrac{1}{2}(5+i) \end{cases}$$

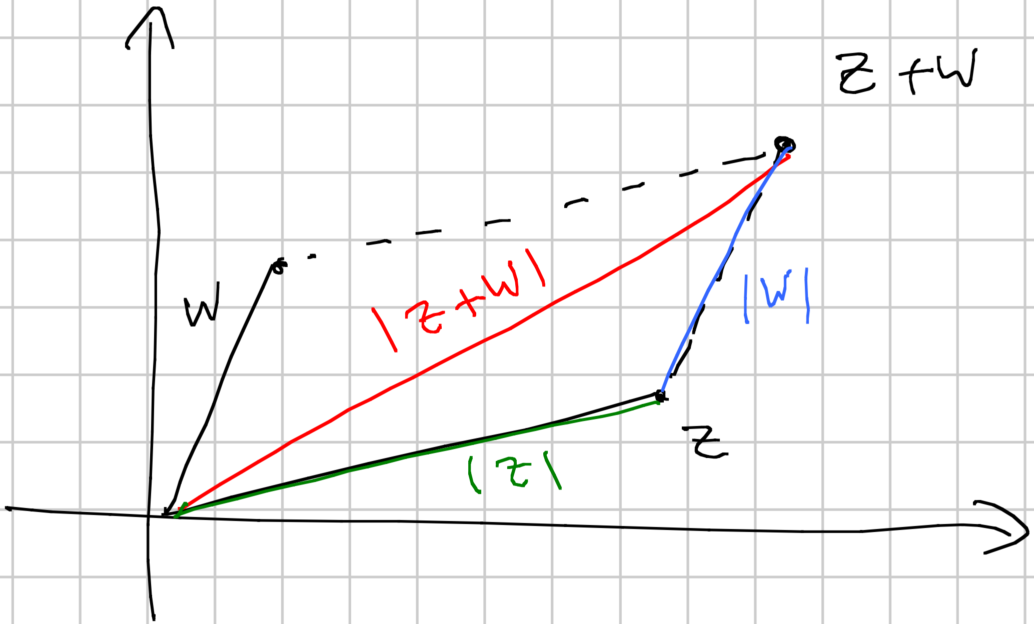
Per gradi ≥ 3 se si intuisce una radice z_0 si divide per $z - z_0$ e si continua col quoziente.

<u>Oss</u>: $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$

$\left(|a| \leq \sqrt{a^2+b^2} \quad , |b| \leq \sqrt{a^2+b^2} \right)$

<u>Prop</u>: $|z+w| \leq |z| + |w|$.

(Disuguaglianza triangolare:


z + w
|z + w|
|w|
w
z
|z|

Dim: $|z+w|^2 = (z+w)\cdot\overline{(z+w)}$

$$= (z+w)\cdot(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$$

$$= |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2$$

$$= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$$

$$\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2$$

$$= |z|^2 + 2|z|\cdot|w| + |w|^2 = \left(|z|+|w|\right)^2 .$$

$\blacksquare$