Esercitazione 30/11/16

5.4.2. Siano V, W spazi vettoriali tali che $\dim V \leq \dim W$.
Provare che esiste $f: V \to W$ iniettiva, e provare che esiste $g: W \to V$ tale che $g \circ f = id_V$

$\dim V = n$, $\dim W = m$ $n \leq m$, fissiamo basi di V e W

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W

Per definire $f: V \to W$, e' sufficiente specificare le immagini

$f(v_i)$ dei vettori della base B, $\forall i = 1, \dots, n$.

Definiamo $f(v_i) = w_i$

- Dimostriamo che f così definita è iniettiva.

Calcoliamo $\dim(\mathrm{Im}\, f)$

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\} = \mathrm{Span}\{w_1, \dots, w_n\}$

Poiché i vettori $w_1, \dots, w_n$ appartengono a una base di W sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n = \dim V$

Applicando la formula della dimensione, vediamo che $\dim(\mathrm{Ker}(f))=0$, quindi f e' iniettiva.

$$[f]_B^C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left[\begin{array}{c} I_n \\ \hline 0 \end{array}\right] = \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\quad}^{n} & \\ \left[\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ \hline & 0 & \end{array}\right] & \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \\ \\ \end{array} \end{array}$$

- Costruiamo $g: W \to V$ tale che $g \circ f = id_{|V}$

È sufficiente specificare i vettori $g(\underset{\substack{\downarrow \\ V}}{w_i})$ $\forall i = 1, \dots, m$

Definiamo g nel modo seguente:

$$\begin{cases} g(w_i) = v_i & \forall i = 1, \dots, n. \\ g(w_j) = u_j \in V \text{ qualsiasi per } j = n+1, \dots, m \end{cases}$$

Verifichiamo che $g \circ f = id_V$ sui vettori della base B

$$g \circ f(v_i) = g\left(f(v_i)\right) = g(w_i) = v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Per linearità $g \circ f = id_V$. $\square$

Es. 54.3. Verificare che i sistemi di vettori $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ assegnati costituiscono basi di dominio e codominio dell'applicazione lineare f assegnata, e determinare la matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \underset{v_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \underset{v_2}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}}, \underset{v_3}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}} \right\}$

$\mathcal{C} = \left(\underset{w_1}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}}}, \underset{w_2}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}}} \right)$.

Si verifica che i vettori di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono linearmente indipendenti, quindi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ rispettivamente.

- 1ª colonna: calcoliamo $f(v_1) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Cerchiamo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 5x_1 + 7x_2 = 3 \end{cases}$$

Soluzione: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 \\ 34 \end{pmatrix}$ $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -47 & * & * \\ 34 & * & * \end{bmatrix}$

2^a colonna: $f(v_2) = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -20 \end{pmatrix} = -67 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 45 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \longrightarrow [f]_B^C = \begin{bmatrix} -47 & -67 & * \\ 34 & 45 & * \end{bmatrix}$$

Cerchiamo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} 1 \\ -20 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

$$[f]_B^C = \begin{bmatrix} -47 & -67 & 68 \\ 34 & 45 & -44 \end{bmatrix}$$

Es. 5.4.4. Dati due spazi vettoriali V di dimensione n, W di dimensione m, e loro sottospazi $X \subset V$ di dimensione $k \leq n$, e $Y \subset W$ di dimensione $h \leq m$, provare che

$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{L}(V, W) : f(X) \subset Y \}$ è un sottospazio di $\mathcal{L}(V, W)$, calcolandone la dimensione

Casi banali: Se $X = \{0\}$ $\mathcal{A} = \mathcal{L}(V, W)$ | Se $Y = \{0\}$ $\mathcal{A} = \{0\}$

Se $Y = W$ $\mathcal{A} = \mathcal{L}(V, W)$

- A è s.s.v. di $\mathcal{L}(V, W)$. Siano $f, g : V \to W$ tali che $f, g \in A$, cioè $f(X) \subset Y$, $g(X) \subset Y$.

Proviamo che $\forall x \in X$, $(f+g)(x) \in Y$

$$(f+g)(x) = \overbrace{\underset{\underset{Y}{\cap}}{f(x)} + \underset{\underset{Y}{\cap}}{g(x)}}^{\in Y} \Rightarrow (f+g) \in A$$

- $f \in A$, $x \in X$

$$(\lambda f)(x) \doteq \underbrace{\lambda \cdot \overbrace{f(x)}^{Y}}_{Y} \Rightarrow (\lambda \cdot f) \in A$$

- Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ base di X, la completiamo a base $\mathcal{B}$ di V

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{v_1, \dots, v_k}_{\text{base di } X}, v_{k+1}, \dots, v_n\}$$

- Sia $\{w_1, \dots, w_h\}$ base di Y, la completiamo a base $\mathcal{C}$ di W

$$\mathcal{C} = \{\underbrace{w_1, \dots, w_h}_{\text{base di } Y}, w_{h+1}, \dots, w_m\}$$

Fissate le basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W abbiamo un'applicazione lineare bigettiva φ

$$\mathcal{L}(V,W) \xrightarrow{\varphi} M_{m\times n}(\mathbb{R})$$
$$f \longrightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Notiamo che $\varphi(A)$ è un s.s.v. di $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e per iniettività di φ $\dim(A) = \dim(\varphi(A))$

• $f \in A = \{ f : \mathcal{L}(V,W) : f(X) \subset Y \} \iff \forall i = 1, \dots, k$

$$f(v_i) \in \underbrace{\mathrm{Span}(\{w_1, \dots, w_h\})}_{Y} \iff [f]_B^C = \begin{array}{cc} & h \\ k & \left[\begin{array}{c|c} D_{h \times k} & E_{h \times (n-k)} \\ \hline F_{(m-h) \times k} & G_{(m-h) \times (n-k)} \end{array}\right] \end{array}$$

$\Updownarrow$

$F_{(m-h) \times k}$ ha tutti i coefficienti nulli $\iff$

$$[f]_B^C = \left[\begin{array}{c|c} D & E \\ \hline 0 & G \end{array}\right]$$

$\operatorname{Dim} \mathcal{A} = \dim(\varphi(\mathcal{A})) = (m \cdot n) - (m-h) \cdot k =$

$= m(n-k) + k \cdot h$

$\left\{ \left[\begin{array}{c|c} D & E \\ \hline 0 & G \end{array} \right] \right\} = \varphi(\mathcal{A})$

- Se $\dim X = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \dim \mathcal{A} = m \cdot n \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{L}(V, W)$
- Se $\dim Y = h = m \Rightarrow \dim \mathcal{A} = m \cdot n \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{L}(V, W)$

5.4.7. Al variare di $t \in \mathbb{R}$, determinare quante sono le applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che

$$\underbrace{f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{v_1}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}}_{w_1}}_{\text{cond 1}}, \quad \underbrace{f\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_2}}_{\text{cond 2}}, \quad \overbrace{f\left(\overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2-t^2 \end{pmatrix}}^{v_3(t)}\right) = \overbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix}}^{w_3(t)}}^{\text{cond 3}}.$$

Dobbiamo verificare per quali t $\{v_1, v_2, v_3(t)\}$ sono linearmente indipendenti.

$\{v_1, v_2\}$ sono linearmente indip.

Verificare per quali t esistono $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ tali che

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = v_3(t)$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 = 6 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 = 2 - t^2 \end{cases}$$

$\lambda_1 - 4\lambda_2 = 6 \longrightarrow \lambda_1 = 6 + 4\lambda_2$

$12 + 11\lambda_2 = 1 \rightarrow \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = 2 \Rightarrow -6 - 1 = 2 - t^2$

$t^2 = 9 \rightarrow t = \pm 3$

Equivalentemente, calcolare

$$\det\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \\ -3 & 1 & 2-t^2 \end{bmatrix}}_{A_t}\right)$$ e verificare $\det(A_t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 3$

2 casi: per $t \neq \pm 3$ $\{v_1, v_2, v_3(t)\}$ sono lin. indipendenti e quindi sono una base di $\mathbb{R}^3$. $\Rightarrow \exists!\, f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa le condizioni date.

$t = \pm 3 \quad v_3(t) = 2v_1 - v_2$

a) $t = 3 \quad v_3(t) = 2v_1 - v_2$, se $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$,

necessariamente per linearità $f(v_3) = 2w_1 - w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \end{pmatrix} = w_3$

Esistono infinite applicazioni lineari che verificano le condizioni date. (1)+(2) $\Rightarrow$ (3) per linearità

b) $t = -3$ per linearità da 1a e 2a condizione

$$f(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \end{pmatrix} \neq w_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} t \\ -15 \end{pmatrix}$$

... per $t = -3$ condizione 1 + condizione 2 $\Rightarrow$ condizione 3 falsa

Non ci sono applicazioni lineari che soddisfano le 3 condizioni