Algebra lineare 29/4/16

$A \in M_{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$

$$\Rightarrow (A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}.$$

Cor (regola di Cramer): se $\det(A) \neq 0$ la soluzione del sistema $A \cdot x = b$ è data da $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$ dove

A_j è ottenuta da A sostituendo la j-esima colonna con b.

<u>Es</u>: $\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$

se $ad - bc \neq 0$ allora ho la soluzione unica

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$$

Es: $\begin{cases} 3x - y + \pi z = 7 \\ 4x + 5y - 2z = 9 \\ x - 12y + 11z = -3 \end{cases}$ ha soluz.

$$x = \dots \qquad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 7 & \pi \\ 4 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & 11 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 3 & -1 & \pi \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & -12 & 11 \end{pmatrix}} \qquad z = \dots$$

Att: $x = \dots \quad y = \dots \quad z = \dots$ è una soluzione;

incognita: vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Dim: la soluz. di $A \cdot x = b$ è $x = A^{-1} \cdot b$ cioè

$$x_i = (A^{-1} \cdot b)_i = \sum_{j=1}^{n} (A^{-1})_{ij} \cdot b_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)} \cdot b_j$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} \cdot b_j \cdot \det(A^{ji})$$

se qui ci fosse

a_{ji}

sarebbe lo sviluppo lungo colonna i-esima di $\det(A)$

$\Rightarrow$ è lo sviluppo lungo la i-esima colonna di $\det(A_i)$ $\Rightarrow$ $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$. $\boxtimes$

Prop: $\det({}^tA) = \det(A)$

Cor: le righe di A sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono le colonne.

Esercizio (determinante di Vandermonde): $n \geq 2$; se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ allora

$$\det \begin{array}{c} \begin{matrix} {\scriptstyle =\lambda_1^0} & {\scriptstyle =\lambda_2^0} & & {\scriptstyle =\lambda_n^0} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{array} = \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

I modo: per induzione su n

$n = 2$ $\qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$

$n = 3$ (non sure):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\lambda_2\lambda_3^2 + \lambda_3\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_2\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_2^2$$

$$(\lambda_3^2 - \lambda_3\lambda_1 - \lambda_3\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\|$$

$$\lambda_3^2\lambda_2 \cancel{- \lambda_3\lambda_1\lambda_2} - \lambda_3\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2^2 - \lambda_3^2\lambda_1 + \lambda_3\lambda_1^2 \cancel{+ \lambda_3\lambda_2\lambda_1} - \lambda_1^2\lambda_2$$

Passo induttivo : supponiamo vera la tesi per $n-1$;

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda_1^{n-3} & \lambda_2^{n-3} & \cdots & \lambda_n^{n-3} \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

cerchiamo di ottenere 0 sulla I colonna sotto l'1

$$
= \det \begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \cdots & \lambda_n - \lambda_1 \\
0 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n(\lambda_n - \lambda_1) \\
\vdots & & & \\
0 & \lambda_2^{n-3}(\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n^{n-3}(\lambda_n - \lambda_1) \\
0 & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1) & \cdots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1)
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\
\leftarrow II - \lambda_1 \cdot I \\
\leftarrow III - \lambda_1 \cdot II \\
\\
\leftarrow \text{penultima } r - \lambda_1 \cdot \text{terzultima} \\
\leftarrow \text{ultima } r - \lambda_1 \cdot \text{penultima}
\end{array}
$$

$$
= (\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_n - \lambda_1) \cdot \det \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 \\
\lambda_2 & & \lambda_n \\
\vdots & & \vdots \\
\lambda_2^{n-3} & & \lambda_n^{n-3} \\
\lambda_2^{n-2} & & \lambda_n^{n-2}
\end{pmatrix}
$$

$$= \prod_{1<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_1) \cdot \prod_{2\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_j - \lambda_i) . \quad \blacksquare$$

<u>II modo</u>: considero $\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$

come polinomio nelle indeterminate $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Noto:

1. è omogeneo di grado

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

2. Se $\lambda_j = \lambda_i$ viene 0 quindi per Ruffini

$\Longrightarrow$ è divisibile per $\lambda_j - \lambda_i \quad \forall j \neq i$

$\Longrightarrow$ è divisibile per $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$

e quest'ultimo ha grado $1 \cdot$ numero di fattori

dunque $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Da questi fatti segue che

$$\det\begin{pmatrix} \vdots & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix} = k \cdot \prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

con $k \in \mathbb{R}$

Per verificare che $k = 1$ osservo che

$$1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3^2 \cdot \lambda_4^3 \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{n-1}$$

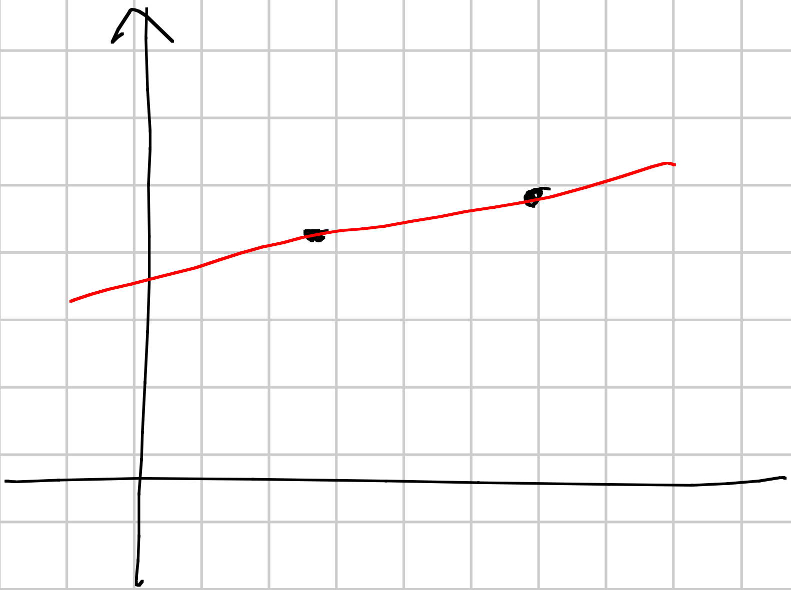
ha coeff. $\underline{1}$ sia nel det sia nel $\prod \ldots$.

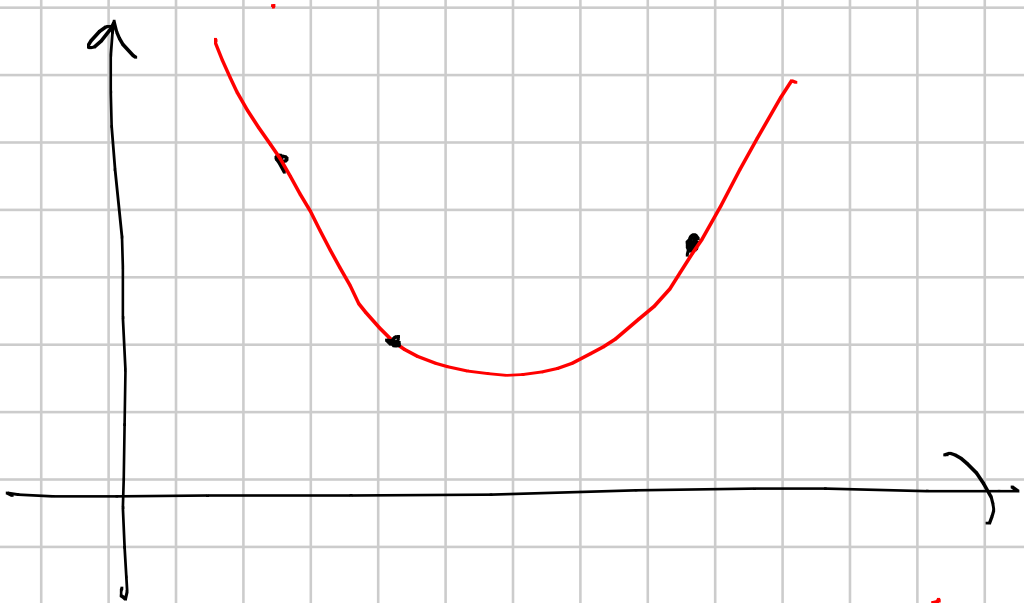
<u>Applicazione</u> (Interpolazione polinomiale):

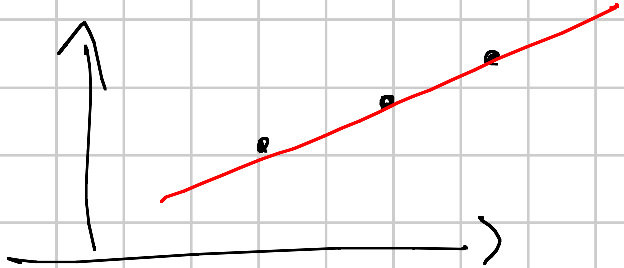
dati nel piano n pti (x_i, y_i) $i = 1 \ldots n$

con ascisse distinte esiste uno e un solo

polinomio di grado $\leq n-1$ il cui grafico contiene i pti :







Infatti cerco $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$

t.c. $p(x_i) = y_i$ cioè

$$\begin{cases} a_0 + x_1 \cdot a_1 + x_1^2 \cdot a_2 + \dots + x_1^{n-1} \cdot a_{n-1} = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + x_n \cdot a_1 + x_n^2 \cdot a_2 + \dots + x_n^{n-1} \cdot a_{n-1} = y_n \end{cases}$$

(sistema con $x_1 \dots x_n\, y_1 \dots y_n$ dati e $a_0, \dots, a_{n-1}$ incognite):

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

è la trasposta di Vandermonde

$$\Rightarrow \det = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$$

(ascisse distinte)

Introdotto det per vedere se esiste A^{-1} e trovarla.

Rango? Sempre il det:

Def: chiamo B sottomatrice di A se B è ottenuta da A cancellando alcune righe e/o colonne.

Dico che B' è orlata di B se B si ottiene da B' cancellando una riga e una colonna (cioè se B' è ottenuta da B riaggiungendo una riga e una colonna di A).

Es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 44 & 2 \\ 5 & -9 & \pi & \sqrt{3} & -11 \\ 14 & 17 & -5 & 8 & \sqrt{2} \\ -e & 4 & 19 & -41 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \pi & -11 \\ 19 & 0 \end{pmatrix}$$

le orlate di B in A sono 6, ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 5 & \pi & -11 \\ -e & 19 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -9 & \pi & -11 \\ 4 & 19 & 0 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Oss: una sottomatrice $r \times r$ di una $m \times n$ ha $(m-r) \cdot (n-r)$ orlate.

Teo: Sia $A \in M_{m \times n}$. Se esiste una B sottomatrice $r \times r$ t.c. $\det(B) \neq 0$ e per ogni orlata B' di B si ha $\det(B') = 0$ allora $\mathrm{rank}(A) = r$.

Strategie per il calcolo del rango:

- Se tutti i coeff. di A sono 0 $\Rightarrow \text{rank}(A) = 0$
- Altrimenti fisso un coeff. di A $\neq 0$ (sottomatrice 1x1) e guardo tutte le sue orlate 2x2: due casi

  - tutte det $= 0 \Rightarrow \text{rank}(A) = 1$
  - qualcuna det $\neq 0 \Rightarrow$ la prima che trovo la fisso

- Esamino le orlate 3×3 della fissata 2×2; due casi:
  - tutte $\det = 0 \Longrightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$
  - qualcuno $\det \neq 0 \Longrightarrow$ la prima che trovo la fisso

....

Oss: $A \in M_{5 \times 6}(\mathbb{R})$. Se ho trovato B sottomatrice 2×2 con $\det(B) \neq 0$ devo esaminare $3 \cdot 4 = 12$ sue orlate 3×3.

Invece tutte le sottomatrici 3×3 sono

$$\binom{5}{3} \cdot \binom{6}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3 \cdot 2}} \cdot \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4}\,2}{\cancel{3 \cdot 2}} = 200.$$

<u>Dim</u>: eseguendo degli scambi di righe e/o colonne che non cambiano rank(A) mi riconduco al caso B è l'angolo $r \times r$ in alto a sinistra.

$$A = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} B & \\ \hline & \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{r} & \underbrace{\qquad}_{n-r} \end{array} & \end{array}$$

Notazione: $B = (w_1, \dots, w_r)$, $A = (v_1, \dots, v_n)$

$\Rightarrow$ per $i \leq r$ si ha $v_i = \begin{pmatrix} w_i \\ a_{r+1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \end{pmatrix}$.

Tesi: $\dim(\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r)) = r$.

Poiché $\det(B) = \det(w_1, \dots, w_r) \neq 0$ ho che $w_1, \dots, w_r$ sono lin. indip. $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_r$ sono lin. indip. $\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r)) \geq r$.

Per concludere devo dimostrare che per $j > n$ ho $v_j \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$. Fisso tale j e noto che, poiché $w_1, \dots, w_n$ è base di $\mathbb{R}^n$ esistono <u>unici</u> $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.c. $w_j = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$.

Affermo che $v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ (onde la tesi).

Prendo $i > n$ e

$$B' = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_r & w_j \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix}$$ orlata di B

So che $\det(B') = 0 \Rightarrow$ colonne lin. dip. ;

ma prime r indip $\Rightarrow$ ultima è comb. lin.

delle prime r

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_j \\ a_{ij} \end{pmatrix} = \beta_1^{(i)} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ a_{i1} \end{pmatrix} + \dots + \beta_r^{(i)} \cdot \begin{pmatrix} w_r \\ a_{ir} \end{pmatrix}$$

ma per l'unicità degli $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ho

$$\beta_1^{(i)} = \alpha_1 \quad \dots \quad \beta_n^{(i)} = \alpha_n$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_j \\ a_{ij} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ a_{i1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} w_n \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} w_j \\ a_{n+1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} w_1 \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} w_n \\ a_{n+1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} \parallel & \parallel & & \parallel \\ V_j & V_k & \cdots & V_r \end{array}$$

■

<u>Cor</u>: in ogni matrice il "rango per righe" è uguale al "rango per colonne". Dove:

"rango per righe/col" =

= max numero di righe/colonne ... lin. indip.

Dim.: "prendendo ${}^tA$ ho una corrispondenza tra le sottomatrici $n \times n$ di A e ${}^tA$ e il det è lo stesso".

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$x = x + i \cdot 0$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$i \cdot y = 0 + i \cdot y$, $i \cdot \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Teo: con le operazioni

$$(x+iy)+(z+iw) = (x+z)+i(y+w)$$

$$(x+iy)\cdot(z+iw) = (xz-yw)+i(xw+yz)$$

$\mathbb{C}$ è un campo. Cioè

(1) – (4) $\quad \mathbb{C}, +, 0$ è gruppo commut.

(5) – (8) $\quad \mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot, 1$ è gruppo commut.

(9) $\quad$ distributiva

Inverso di $z = x + iy \neq 0$ è

$$z^{-1} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

<u>Visto</u>: l'equazione $z^n = a$ ha n soluzioni su $\mathbb{C}$.
per ogni $a \neq 0$.

Infatti se $a = \rho \cdot e^{i\vartheta}$ le soluzioni di
$z^n = a$ (dette radici n-esime di a) sono

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i(\vartheta + 2k\pi)/n} \qquad k = 0, \dots, n-1 .$$

<u>Teorema fondamentale dell'algebra</u> (difficile):

ogni polinomio non costante a coeff. in $\mathbb{C}$
ammette radici in $\mathbb{C}$.

Polinomi:

$$\mathbb{C}[z] = \left\{ a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d \ : \ \begin{array}{l} d \geq 0 \\ a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

(con l'accordo che i monomi $0 \cdot z^k$ si possono mettere o togliere).

Radice di $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ è $z_0 \in \mathbb{C}$ t.c.

$p(z_0)=0$, cioè soluzione dell'equazione $p(z)=0$.

<u>Fatto</u>: anche in $\mathbb{C}[z]$ vale la divisione euclidea tra polinomi: dati $p(z), s(z) \in \mathbb{C}[z]$ con $\deg(s(z))>0$ esistono unici $q(z), r(z) \in \mathbb{C}[z]$ t.c.

$$\underbrace{p(z)}_{\text{dividendo}} = \underbrace{q(z)}_{\text{quoziente}} \cdot \underbrace{s(z)}_{\text{divisore}} + \underbrace{r(z)}_{\text{resto}}, \quad \deg(r(z)) < s(z).$$