Es. 28/9/2016

leone.slarich@gmail.com

Ricevimento Giovedì 11-13 (NO DOMANI)

Studio 132 DM (piano terra)

Es. 2.1.1. / 2.1.2

Verificare che l'opposto additivo e l'inverso moltiplicativo di un numero non nullo sono unici usando le proprietà di + e ·.

1) Esistenza dell'elemento neutro
(0 per +, 1 per ·)

2) Esistenza dell'opposto (−q) e dell'inverso
(q^{-1}, $q \neq 0$)

3) Associatività

4) Commutatività

a) $x+q = y+q = 0 \Rightarrow x = y$

b) $x \cdot q = y \cdot q = 1 \quad (q \neq 0) \Rightarrow x = y$

Mostriamo di più (regole di cancellazione):

a) $x+q = y+q \Rightarrow x = y$

b) $x \cdot q = y \cdot q \quad (q \neq 0) \Rightarrow x = y$

a) $x+q=y+q \Rightarrow (x+q)+(-q)=(y+q)+(-q) \Rightarrow$

opposto

$\Rightarrow x+(q+(-q))=y+(q+(-q)) \Rightarrow x+0=y+0$

associativa

$$\Downarrow$$

$$x=y$$

$$x \cdot q = y \cdot q \Rightarrow (x \cdot q) \cdot q^{-1} = (y \cdot q) \cdot q^{-1} \Rightarrow$$

$$x \cdot (q \cdot q^{-1}) = y \cdot (q \cdot q^{-1}) = x \cdot 1 = y \cdot 1 \Rightarrow x = y \quad \square$$

Es. 2.2.1 (Moltiplicazione tra polinomi)

Un polinomio è un'espressione del tipo:

$a_0 + a_1 x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$ → grado del polinomio

$a_i \in \mathbb{R}$

$1 + x^3 = 1 + x^3 + 0 \cdot x^6$

Un polinomio si può scrivere come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n$$ (sottointendendo che a_n sono tutti nulli da un certo punto in poi).

$$1+x^3 = 1 + 0x + 0\cdot x^2 + 1\cdot x^3 + \dots$$

Somma:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \cdot x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) \cdot (b_0 + b_1 x + \ldots + b_m \cdot x^m) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)\, x^2 + \ldots$$

$$+ \ldots + (a_n \cdot b_m) \cdot x^{n+m}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \cdot x^n\right) = \underline{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right) x^n}$$

Verificare che $\mathbb{R}[x]$ con $(+, \cdot)$ verifica le proprietà di campo tranne la (6) (esistenza dell'inverso per $\cdot$)

- Elemento neutro per $+$ è $0 = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots$

- $1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots +$

9) Proprietà distributiva

$$p(x)\cdot\left(q(x)+r(x)\right)=p(x)\cdot q(x)+p(x)\cdot r(x)$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(b_n+c_n\right)\cdot x^n\right) =$$

coeff. di $p(x)$

coeff. di $q(x)$

coeff. di $r(x)$

$\to q(x)+r(x)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \left(b_{n-k} + c_{n-k} \right) \right) \cdot x^n = \text{(distributività di + e · su } \mathbb{R}\text{)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(a_k \cdot b_{n-k} + a_k \cdot c_{n-k} \right) \right) \cdot x^n =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} \right) \cdot x^n}_{p(x) \cdot q(x)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot c_{n-k} \right) x^n}_{p(x) \cdot r(x)} =$$

$= p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$

In generale le proprietà di $+$ e $\cdot$ su $\mathbb{R}[x]$
sono conseguenza delle proprietà
di $+$ e $\cdot$ su $\mathbb{R}$.