Esercitazione A. Lin 26/10/16

4.2.16) $W = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : tr(A) = 0 \} =$

$= \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : \sum_{i=1}^{n} (A)_{i,i} = 0 \}$. Trovare una base di W.

$W_1 = \{ D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ diagonali t.c. $tr(D) = 0 \} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \right\}$

$W_2 = \{ B \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid (B)_{i,i} = 0 \ \forall i = 1, \dots, n \}$.

Osservazione: $W_1 \subset W$, $W_2 \subset W$

Inoltre: $W = W_1 + W_2$

$A \in W \quad tr(A) = 0 \qquad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{bmatrix}$

stessi coefficienti di A

$$A = \underset{W_1}{\underset{\cap}{D}} + \underset{W_2}{\underset{\cap}{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{bmatrix}$$

- Per trovare un sistema di generatori per W possiamo unire una base di W_1 a una base di W_2.

$$\text{Base per } W_2 = \{ B_{ij} \text{ per } i,j = 1,\dots,n \text{ e } i \neq j \} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} 0 & & 0 & & 0 \\ & \ddots & & 1 & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

B_{ij} è la matrice con coefficiente 1 al posto (i,j) e 0 altrove.

Se $C \in W_2$ $\quad C = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (C)_{ij} \cdot B_{ij}$.

- Base per W_1

Definiamo D_i per $i = 2, \dots, n$.

$(D_i)_{1,1} = -1 \quad (D_i)_{i,i} = 1 \quad (D_i)_{i,j} = 0$ altrove ; $\begin{bmatrix} -1 & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$

$D_i \in W_1 \quad \forall i$

$W_1 = \mathrm{Span}(\{D_i : i = 2, \dots, n\})$

$D \in W_1 \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ con $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$. cioè $-\lambda_1 = \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

Allora $D = \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3 + \ldots + \lambda_n D_n$

- $\{D_i \mid i = 2, \ldots, n\}$ formano una base di W_1.

$$\mathrm{Span}\Big(\underbrace{\{D_i,\ i=2,\ldots,n\}}_{\substack{\text{base per } W_1 \\ \# n-1}} \cup \underbrace{\{B_{ij},\ i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j\}}_{\substack{\text{base per } W_2 \\ \# n^2-n}}\Big) = W$$

+ sono lin. indipendenti

$\Downarrow$

sono una base

W ha dimensione n^2-1. $\square$

4.2.17. $S_n = \left\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : {}^tA = A \right\} = \left\{ A : (A)_{ij} = (A)_{ji} \ \forall i,j = 1, \dots, n \right\}$

Base: $B_{i,j}$ per $i,j = 1, \dots, n$ e $i \leq j$

$$B_{ij} = \left\{ (B_{ij})_{ij} = 1,\ (B_{ij})_{ji} = 1,\ (B)_{h,k} = 0 \text{ per } (h,k) \neq (i,j) \right\}$$

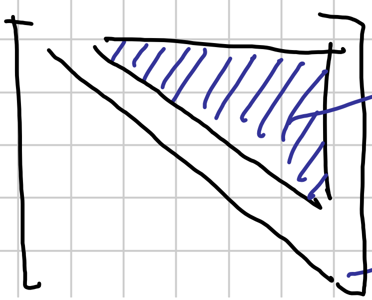
$$B_{ij} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i - \end{array} \begin{bmatrix} & \vert & & \vert & \\ & & & 1 & \\ & 1 & & & \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ - j \\ \\ \\ \end{array} \qquad B_{ii} = \begin{array}{c} i - \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 & & \vert & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \ 0 \end{bmatrix}$$

Sia $C \in S_n$, $C = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \le j}}^{n} \underbrace{(C_{ij})}_{\text{coefficienti di } C} \cdot B_{ij}$.

$S_n = \mathrm{Span}(\{B_{ij} \mid i,j = 1,\dots,n,\ i \le j\})$. Inoltre le B_{ij} sono lin. indip.

$\Rightarrow$ le B_{ij} formano una base di $S_n \to S_n$ ha dimensione $\frac{n^2+n}{2}$

$C \in S_n$



$\to \frac{n^2-n}{2}$ elementi

0

$\to n$ elementi sulla diagonale

4.2.18) Trovare una base di

$$\mathcal{A}_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : {}^tA = -A\} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : (A)_{i,j} = -(A_{j,i}) \ \forall i,j = 1 \dots n\}$$

Definiamo $B_{i,j}$ per $i,j = 1, \dots n$, $i \lneq j$.

$B_{i,j}$ è definita da $(B_{i,j})_{i,j} = 1$, $(B_{i,j})_{j,i} = -1$ $(B_{i,j})_{h,k} = 0$ per $(h,k) \neq (i,j)$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdot & 0 & 1 & \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ -1 & & 0 & \ddots & 0 \end{bmatrix}$$

Verificare che $\{B_{i,j} : i,j = 1, \dots, n,\ i<j\}$ sono una base per $\mathcal{A}_n$.

Base = $\dim(A_n) = \frac{n^2-n}{2}$.

Es. 4.4.1. Completare i vettori $v_1, \dots, v_k$ assegnati a una base dello spazio vettoriale V dato.

a) $V = \mathbb{R}^4$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$W = \{ x \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_1 = x_4 \}$. W è s.s.v. di $\mathbb{R}^3$. Inoltre $v_1, v_2 \in W$

Quindi $\mathrm{Span}(\{v_1, v_2\}) \subset W$

Notiamo che $\underset{e_4}{v_3} = e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $e_4 \notin W \Rightarrow e_4 \notin \mathrm{Span}(\{v_1, v_2\})$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, \overset{e_4}{\overset{\shortparallel}{v_3}}\}$ sono lin. indip.

- Per concludere e' sufficiente trovare un vettore $v_4 \notin \mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3\})$

Proviamo a porre $v_4 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

È sufficiente mostrare che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono linearmente indip.

cioè $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \quad i = 1,2,3,4.$

$$\begin{cases} 4\lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ 5\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ -6\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 7\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = 0$ ok! $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ sono lin. ind.

$\lambda_3 = 0$

$$\mathrm{Span}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \mathbb{R}^4$$

b) (esercizio a casa) Hint: aggiungere $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $V = \{ x \in \mathbb{R}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\dim V = 3$

- Scegliamo $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $v_2 \in V$, inoltre $\{v_1, v_2\}$ sono lin. indip.

- Cerchiamo $v_3 \in V$ t.c. $v_3 \notin \mathrm{Span}(\{v_1, v_2\})$.

$v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. $v_3 \in V$. Verifichiamo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono lin. indip.

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0$ $\longrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $\square$ $\Rightarrow$ soluzioni solo per $\lambda_i = 0 \ \forall i$

$6\lambda_1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ lin. indip., $v_1, v_2, v_3 \in V$, $\dim(V) = 3$

Concludiamo che $\{v_1, v_2, v_3\}$ sono base di V.

f) $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \boxed{\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{matrix}} \right\}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2 equazioni indipendenti

$\dim(V) = 2$

È sufficiente trovare $v_2 \in V$ t.c. $\{v_1, v_2\}$ lin. indip.

Scegliamo $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si verifica che $v_2 \in V$, $\{v_1, v_2\}$ sono lin. indip.

$\Rightarrow v_1, v_2$ base