Algebra lineare 25/10/16

$v_1, \dots, v_n$ base di V se lin. indip. e generano

$\Leftrightarrow$ ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \quad ; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{B}}$$

coordinate

Teo: due basi di V hanno stesso numero di elementi.

Def: $\dim(V) = n$ se ha base $v_1, \dots, v_n$.

Fatti: 1) ogni insieme di vett. lin. indip. si può completare a base

2) da ogni insieme di generatori si può estrarre una base

3) $W \subset V \Rightarrow \dim(W) \leq \dim(V)$;
$\dim(W) = \dim(V) \Leftrightarrow W = V$.

Fissiamo W, Z sttsp. vett. di V. Sappiamo:

- $W \cap Z$ è sttsp.
- $W \cup Z$ è sttsp solo se $W \subset Z$ o $Z \subset W$.

Def: chiamo $W+Z$ il sttsp. $\mathrm{Span}(W \cup Z)$
(dunque: il più piccolo sttsp. di V che contiene sia W sia Z).

nuovissimo

<u>Prop</u>: $W+Z = \{w+z : w \in W, z \in Z\}$.

<u>Dim</u>: Provo che:

- è stsp: $\lambda_1(w_1+z_1) + \lambda_2(w_2+z_2)$

$$= \underbrace{(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)}_{\in W} + \underbrace{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}_{\in Z} \quad \checkmark$$

- contiene W e Z: $\quad W \ni w = \underset{\in W}{w} + 0 \in Z$

$$Z \ni z \longmapsto \underset{\substack{\cap\\ W}}{0} + \underset{\substack{\cap\\ Z}}{z}$$ ✓

- se T è ssp. che contiene W e Z allora contiene lui; se $\underset{\substack{\cap\\ W}}{w} + \underset{\substack{\cap\\ Z}}{z}$

ho $w \in W \subset T$, $z \in Z \subset T \Rightarrow w+z \in T$. $\blacksquare$

<u>Teo</u> (formula di Grassmann): se W, Z sono sottosp. di V

$$\dim(\underset{q}{W}) + \dim(\underset{r}{Z}) = \dim(\underset{p}{W \cap Z}) + \dim(W + Z).$$

<u>Dim</u>: chiamo

$$p = \dim(W \cap Z)$$
$$q = \dim(W)$$
$$r = \dim(Z)$$

Devo provare che $\dim(W+Z) = q + r - p$.

Sia $u_1, \dots, u_p$ una base di $W \cap Z$.

Noto che $u_1, \dots, u_p \in W$ e sono lin. indip

$\Rightarrow$ posso completare a base $u_1, \dots, u_p, w_{p+1}, \dots, w_q$ di W.

Analog: completo a base $u_1, \dots, u_p, z_{p+1}, \dots, z_r$ di Z.

Affermo che $\underbrace{\underbrace{u_1, \dots, u_p}_{p}, \underbrace{w_{p+1}, \dots, w_q}_{q-p}, \underbrace{z_{p+1}, \dots, z_r}_{r-p}}_{q+r-p}$ sono base di $W+Z$.

Dunque questo basta a concludere.

Provo l'affermazione:

- osservo che ciascuno di loro è in $W \cup Z$ quindi in $W+Z \Rightarrow$ ok.

- lin. indip: siano $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_q, \gamma_{p+1}, \dots \gamma_n \in \mathbb{R}$ t.c.
$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \beta_{p+1} w_{p+1} + \dots + \beta_q w_q + \gamma_{p+1} z_{p+1} + \dots + \gamma_n z_n = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \beta_{p+1} w_{p+1} + \dots + \beta_q w_q}_{\text{comb. lin. degli } u_i \in W \cap Z \subset W \text{ e degli } w_i \in W \;\Downarrow\; \text{è in } W} = \underbrace{-\gamma_{p+1} z_{p+1} - \dots - \gamma_r z_r}_{\text{comb. lin. degli } z_i \in Z \;\Downarrow\; \text{è in } Z}$$

comb. lin. degli $u_i \in W \cap Z \subset W$

e degli $w_i \in W$

$\Downarrow$

è in W

comb. lin. degli $z_i \in Z$

$\Downarrow$

è in Z

è in $W \cap Z$.

Poiché $u_1, \dots, u_p$ generano $W \cap Z$ esistono $\delta_1, \dots, \delta_p \in \mathbb{R}$ t.c. $-\gamma_{p+1} z_{p+1} - \dots - \gamma_n z_n = \delta_1 u_1 + \dots + \delta_p u_p$

$$\Longrightarrow \quad \delta_1 u_1 + \dots + \delta_p u_p + \gamma_{p+1} z_{p+1} + \dots + \gamma_n z_n = 0 .$$

Poiché $u_1, \dots, u_p, z_{p+1}, \dots, z_n$ è base di Z ho $(\delta_1 = \dots = \delta_p =)\ \gamma_{p+1} = \dots = \gamma_n = 0$.

Per simmetria ho anche $\beta_{p+1}, \dots, \beta_q = 0$.

Resto con $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ ma $u_1, \ldots, u_p$

è base di $W \cap Z \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$.

Generano: se prendo $v \in W + Z$, ho $v = \underset{\underset{W}{\cap}}{w} + \underset{\underset{Z}{\cap}}{z}$

$$\Longrightarrow \quad w = \alpha_1 u_1 + \cdots \quad + \beta_{p+1} w_{p+1} + \cdots$$

$$z = \gamma_1 u_1 + \cdots \quad + \delta_{p+1} z_{p+1}$$

$$\Longrightarrow v = w + z = (\alpha_1 + \gamma_1) u_1 + \cdots + \beta_{p+1} w_{p+1} + \cdots + \delta_{p+1} z_{p+1} \cdots \quad \blacksquare$$

Grassmann: $\dim(W) + \dim(Z) = \dim(\underbrace{W \cap Z}_{W}) + \dim(\underbrace{W + Z}_{Z})$.

<u>Oss</u>: se $W \subset Z$ è banale: $W \cap Z = W$
$W \cup Z = Z$;

in particolare se uno dei due è banale $\{0\}$ o V.

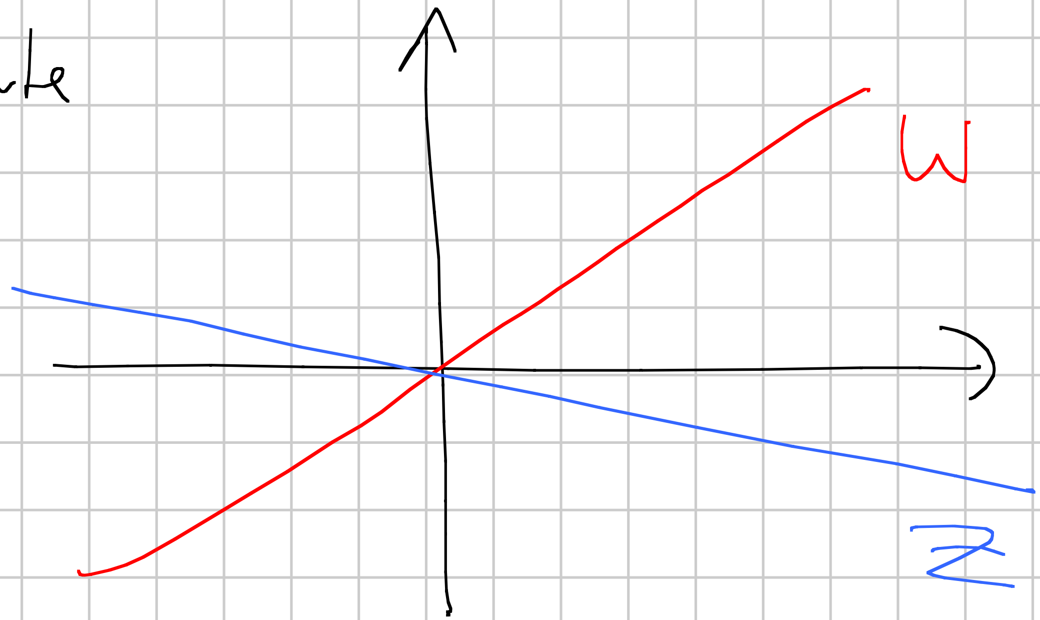
<u>Esempi</u>: $V = \mathbb{R}^2$; W, Z non banali
$\Rightarrow \dim W = \dim Z = 1$ (rette).

Caso non banale: distinte

$$\dim(W \cap Z) = 0$$

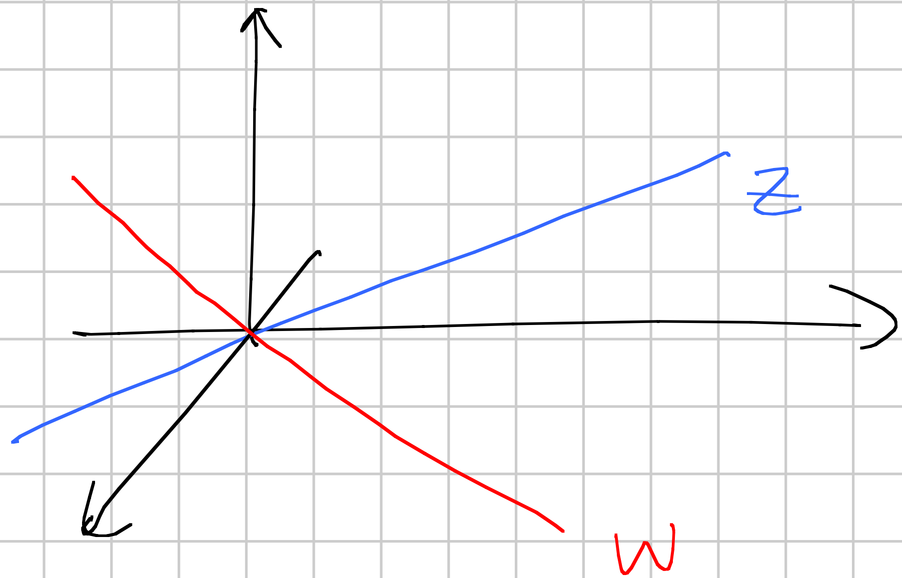
$$\dim(W + Z) = 2$$

$$\underset{\dim W}{1} + \underset{\dim Z}{1} = 0 + 2 \quad \checkmark$$



<u>Es</u>: $V = \mathbb{R}^3$; W, Z non banali $\Rightarrow$ dim 1 o 2.

•) $\dim W = \dim Z = 1$



$\dim(W \cap Z) = 0$

$\dim(W + Z) = 2$

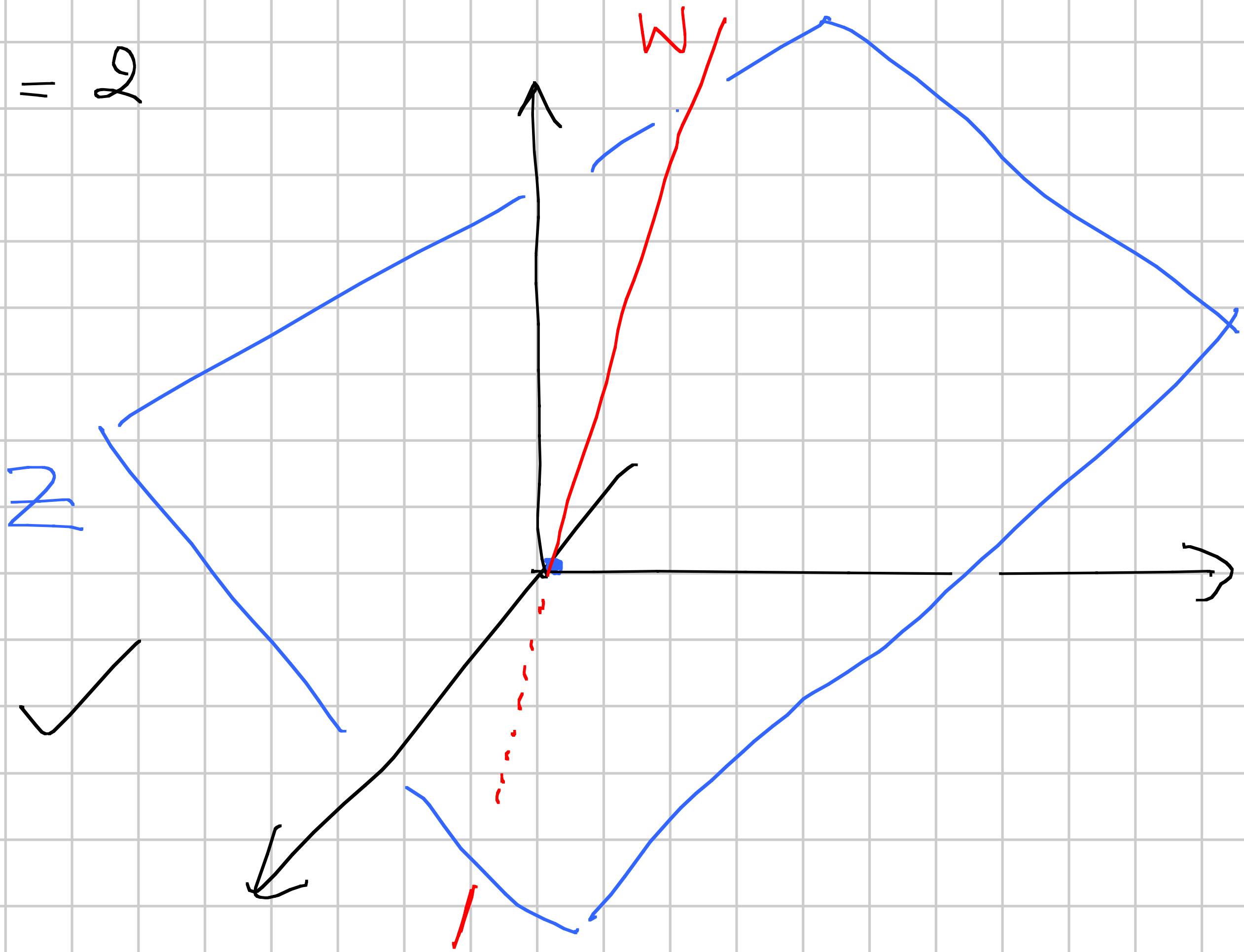
$1 + 1 = 0 + 2$ ✓

$\cdot)\ \dim W = 1, \quad \dim Z = 2$

$\dim(W \cap Z) = 0$

$\dim(W + Z) = 3$

$1 + 2 = \overline{0 + 3}$ ✓

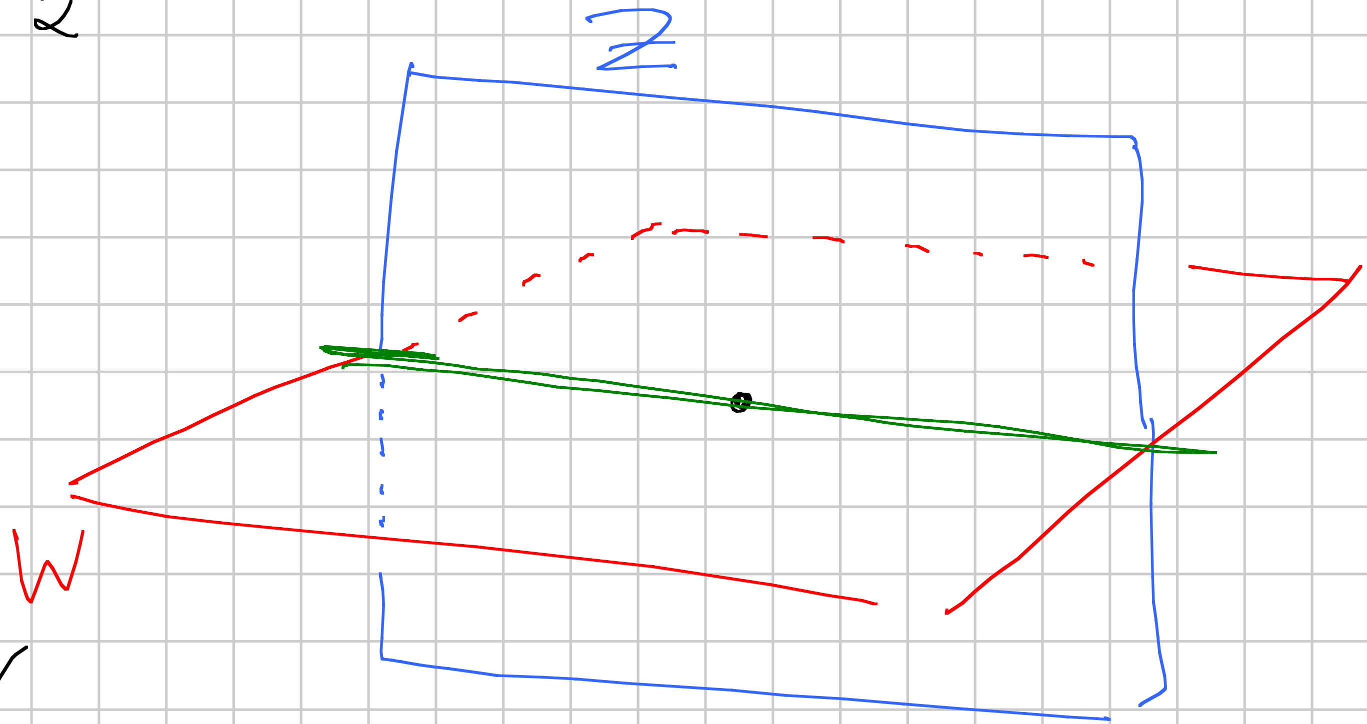


·) $\dim W = \dim Z = 2$

$\dim(W \cap Z) = 1$

$\dim(W + Z) = 3$

$2 + 2 = 1 + 3$ $\checkmark$



Prop: due piani distinti in $\mathbb{R}^3$ si intersecano in una retta.
(stsp. vett.)

Dim: $W \cap Z$ può avere dim $\to$
- 0 $\to$ ...
- 1 $\to$ <u>OK</u>
- 2 $\to$ $W = Z$ No

... $\to$ Grassman

$$\underset{2}{\dim(W)} + \underset{2}{\dim(Z)} = \underset{0}{\dim(W \cap Z)} + \dim(W+Z)$$

$\Longrightarrow$ $W+Z$ ha dim 4 : impossibile ; in $\mathbb{R}^3$ un stsp ha dim ≤ 3. $\boxtimes$

__Def__ : retta = stsp. di dim. 1

piano = stsp di dim. 2 .

__Es__ : in $\mathbb{R}^4$ esistono due piani W, Z con

con $W \cap Z = \{0\}$. Ad esempio

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \\ t \end{pmatrix} : w, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Span}(e_1, e_2) \qquad \text{Span}(e_3, e_4)$$

Chiaro che $W \cap Z = \{0\}$. Grassmann:

$$2 + 2 = 0 + \dim(W+Z)$$

$\Rightarrow W + Z = \mathbb{R}^4$. Per $W = \operatorname{Span}(e_1, e_2)$

$Z = \operatorname{Span}(e_3, e_4)$

$W + Z = \operatorname{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$. ✓

Es: $W, Z \subset \mathbb{R}^4$, $\dim W = 2$, $\dim Z = 3$

Gr: $2 + 3 = \dim(W \cap Z) + \underbrace{\dim(W + Z)}_{\leq 4}$

$\Rightarrow \dim(W \cap Z) \geq 1$.

Pe $W = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$, $Z = \mathrm{Span}(e_2, e_3, e_4)$

ho $W \cap Z = \mathrm{Span}(e_2) \Rightarrow \dim = 1$

$W + Z = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim = 4$

Cor: sia $\dim(V) = n$;

(a) se $\dim(W) + \dim(Z) > n$ allora $W \cap Z \neq \{0\}$.

(b) se $\dim(W) + \dim(Z) < n$ allora $W + Z \neq V$.

<u>Dim</u>: (a) $$\underbrace{\dim(W)+\dim(Z)}_{>n} = \dim(W\cap Z) + \underbrace{\dim(W+Z)}_{\leq n}$$

$\Downarrow$

è ≥ 1

(b) $$\underbrace{\dim(W)+\dim(Z)}_{<n} = \underbrace{\dim(W\cap Z)}_{\geq 0} + \dim(W+Z)$$

$\Downarrow$

è $< n$. $\blacksquare$

Ricordo: $[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{B}$ base di V)

è bigettiva e rispetta le operazioni:

- manda 0 in 0
- manda $+$ in $+$
- manda $\lambda\cdot$ in $\lambda\cdot$

Def: se V, W sono spazi vettoriali e $f : V \to W$ è funzione dico che f è lineare se

- $f(0) = 0$
- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \qquad \forall v_1\, v_2 \in V$
- $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in V$.

<u>Oss</u>: equivale a chiedere

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

<u>Oss</u>: a sx degli "=" ho le operaz di V, a dx quelle di W.

Regole informali:

- per definire un stsp. di

$$\mathbb{R}^n,\ M_{m\times n},\ \mathbb{R}[t],\ \mathcal{F}(S,\mathbb{R}),\ \dots$$

bisogna usare equazioni <u>lineari</u> (polinomiali omogenee di I grado) in

- $\mathbb{R}^n \ni x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ eq. in $x_1, \dots, x_n$
- $\mathcal{M}_{m \times n} \ni A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$ eq. in a_{ij}
- $\mathbb{R}[t] \ni \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ eq. in $a_0, a_1, \dots$
- $\mathcal{F}(S, \mathbb{R}) \ni f = \{ S \ni s \mapsto f(s) \in \mathbb{R} \}$ eq. in $f(s)$

(in realtà vanno bene lineari o mescolate)

- Se parto da V di dim n e definisco X tramite p equaz. lineari mi attendo che la dimensione sia $n-p$: però non è sempre vero (lo è se ogni nuova equaz. aggiunta "dice" cose non dette dalle precedenti.

$\boxed{4.2.7}$ $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} -4x + 2y + 5z = 0 \; ✓ \\ 3x + 7y - 2z = 0 \; ✓ \\ x + 27y + 4z = 0 \; ✓ \end{array} \right\}$

$\boxed{4.2.7'}$ $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} -4x + 2y + 5z = 0 \\ 3x + 7y - 2z = 0 \\ \underbrace{11x + 3y - 12z = 0}_{-2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{II}} \end{array} \right\}$

$\Longrightarrow \dim X = 1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -27y - 4z \\ (108 + 2)y + (16 + 5)z = 0 \\ (-81 + 7)y + (-12 - 2)z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -27y - 4z \\ 110y + 21z = 0 \\ -74y - 14z = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = -27y - 4z \\ 2 \cdot \mathrm{II} + 3 \cdot \mathrm{III} = 0 \\ -74y - 14z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{———} \\ (220 - 222)\,y = 0 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad X = \{0\} \; ; \; \dim X = 0$$

$\boxed{4.2.8}$ $W = \{ x \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \}$

dim attesa $= 4 - 1 = 3$

$$x \in W \Longleftrightarrow x_2 = \frac{5}{8} x_1 + \frac{1}{4} x_3 - \frac{3}{8} x_4$$

"alcuni par. vincolati" espressi in funz. di ...

parametri liberi

Base corrispondente a questa ultima:

prendo a turno tutti i parametri liberi nulli tranne uno non nullo (= 1 o altro)

$x_1 = 8, x_3 = 0, x_4 = 0$ $\quad$ $x_1 = 0, x_3 = 4, x_4 = 0$ $\quad$ $x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = 8$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Farò vedere che viene una base.