$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$ base che completa

└ dovrei provare che
(1) sono lin. indip. ✓
(2) generano. Ma vedremo che basta (1)

Es: $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3$ lin. indip.

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 7 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right)$$ base che completa

└ stesso.

Estrazione

Prop: se $\dim(V) = n$ e sono dati $v_1, \dots, v_k$ generatori di V, il seguente procedimento fornisce una base di V:

- scartare tutti gli 0 iniziali fino al primo $v_{i_1} \neq 0$ (escludiamo $n = 0$)

- scarto tutti i successivi che sono multipli di v_{i_1} fino al primo v_{i_2} non multiplo di v_{i_1}

- scarto tutti i successivi che appartengono a $Span(v_{i_1}, v_{i_2})$ fino al primo $v_{i_3} \notin Span(v_{i_1}, v_{i_2})$

...

- costruiti $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ scarto tutti i successivi che stanno in $Span(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ fino o alla fine della lista o al primo $v_{i_{k+1}} \notin Span(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$.
- avanti così

Dim: lin. indip.: ogni volta aggiungo

$v_{i_{k+1}} \notin \mathrm{Span}(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$

$\underset{\text{Lem 1}}{\Longrightarrow}$ preservo indipendenza lineare.

generano: ogni vettore che scarto

sta nel generato di quelli già tenuti

$\Longrightarrow$ nel generato di quelli già esaminati

$\underset{\text{Lem 2}}{\Longrightarrow}$ il generato di tutti quelli tenuti

fino a un certo punto è uguale

al generato di tutti quelli esaminati –

Es: lista di generatori di $\mathbb{R}^2$ (non verifico):

estraggo: $\cancel{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}\ \cancel{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}\ \cancel{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}\ \underset{\checkmark}{\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}}\ \cancel{\begin{pmatrix}12\\-28\end{pmatrix}}\ \cancel{\begin{pmatrix}-1.5\\3.5\end{pmatrix}}\ \underset{\checkmark}{\begin{pmatrix}9\\4\end{pmatrix}}\ \underbrace{\cancel{\begin{pmatrix}17\\21\end{pmatrix}}\ \cancel{\begin{pmatrix}\pi\\e\end{pmatrix}}}$

raggiunti 2 vett. l.i.
gli altri sono generati
perché dim = 2

Prop: se $\dim_{\mathbb{R}}(V)=n$ e ho n vett. lin. indip. allora generano (dunque sono base)

(Segue da Lem 1)

Prop: se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ e ho n generatori allora sono lin. indip. (dunque base).

Dim: posso estrarre una base, ma essa ha n elementi, dunque ho tenuto tutti. ∎

" numero giusto per essere base + una delle due proprietà " $\Longrightarrow$ base

Es: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono base di $\mathbb{R}^3$.

Poiché $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e ho 3 vettori basta vedere che sono lin. indip. cioè che l'unica soluz. di $\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

è $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\begin{cases} 3\alpha + 4\beta + 6\gamma = 0 \ \checkmark \\ 2\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0 \ \checkmark \\ -\alpha + 5\beta + \gamma = 0 \ \checkmark \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 5\beta + \gamma \\ 19\beta + 9\gamma = 0 \\ 8\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 8(19\beta + 9\gamma) - 19(8\beta + 5\gamma) = 0 \\ \underline{\qquad} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -23\gamma = 0 \\ = \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Oss: se $v_1, \dots, v_k \in V$ (non suppongo che generino)

applicando l'estrazione a $v_1, \dots, v_k$ trovo una base di $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$.

Prop: Sia V sp. vett. con $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$.
Se $W \subset V$ è sottosp. allora $\dim_{\mathbb{R}}(W) \leq n$ e

l'uguaglianza vale solo se $W = V$.

<u>Dim</u>: devo provare che $\dim(W) < +\infty$; altrimenti conterrebbe insiemi lin. indip. con più di n el.; assurdo poiché $W \subset V$.

Se $\dim(W) = k$ ho base con k el.

$\underbrace{w_1, \dots, w_k}_{\text{lin. indip}} \in V$, $\dim V = n$

$\Longrightarrow k \leq n$.

Se $k = n$ $w_1, \dots, w_k$ sono base anche di V
$\Longrightarrow W = V$. $\blacksquare$