Algebra Lineare 19/10/16

V sp. vett ; base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ che sono lin. indip. e generano. Ovvero: ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$;

chiamo $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$, indicato con $[v]_{\mathcal{B}}$.

<u>Fatto</u>: $\mathbb{R}[t]$ non ha basi. Anzi: non ha alcun insieme finito di generatori. Infatti se per assurdo $p_1(t), \dots, p_n(t)$ generassero, prendo $d = \max\{\deg(p_j(t)) : j = 1 \dots n\}$; $t^{d+1} \notin \mathrm{Span}(p_1(t), \dots, p_n(t))$ Assurdo.

(Ad es: se per assurdo

$p_1(t) = \sqrt{3} - 7t + 8t^4$, $p_2(t) = 9 - \sqrt{2}\, t^2 + 17 t^{1000}$

$p_3(t) = \pi t^{100} - 91 t^{107}$, $p_4(t) = 11t - 9t^2 + 41 t^6$

$p(t) = t^{1001}$ non si scrive come

$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4$)

<u>Prop</u>: se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una base allora

$$\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}}$$

è biiettiva e "rispetta le operaz di sp. vett":

$\phi(0)$. $\quad$ $\left([0]_{\mathcal{B}} = 0 \right)$

$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$ $\quad$ $\left([v_1 + v_2]_{\mathcal{B}} = [v_1]_{\mathcal{B}} + [v_2]_{\mathcal{B}} \right)$

$\phi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \phi(v)$ $\quad$ $\left([\lambda \cdot v]_{\mathcal{B}} = \lambda \cdot [v]_{\mathcal{B}} \right)$

Cioè: $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ consentono di identificare V a $\mathbb{R}^n$ come sp. vettoriale.

Dim: ben def.: ogni v si scrive in modo unico iniettiva : $\phi(v) = \phi(w) = x$

$\Longrightarrow v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$

$w = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$

$\Longrightarrow v = w$

suriettiva : se $x \in \mathbb{R}^n$, ho $x = \phi(v)$

dove $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$

$\phi(0) = 0$: $\underset{\substack{\cap \\ V}}{[0]}_{\mathcal{B}} = \underset{\cap}{0}$ $\mathbb{R}^n$ cioè $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

infatti $0 = \boxed{0} v_1 + \dots + \boxed{0} v_n$

$\phi(v+w) = \phi(v) + \phi(w)$;

se $[v]_{\mathcal{B}} = x$ cioè $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$[w]_{\mathcal{B}} = y$ cioè $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

devo vedere che $[\underbrace{v+w}_{V}]_{\mathcal{B}} = \underbrace{x+y}_{\mathbb{R}^n}$

cioè che $v+w = (x_1+y_1) v_1 + \dots + (x_n+y_n) v_n$

vero: sommando identità evidenziate.

$$\phi(\lambda \cdot \underbrace{v}_{V}) = \lambda \cdot \underbrace{\phi(v)}_{\mathbb{R}^n}$$ analogo. $\boxtimes$

Se V ha base con n elementi allora V "è come $\mathbb{R}^n$" come sp. vett.

Q: per $n \neq m$, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ sono uguali o diversi come spazi vett.?

Fatto: come insiemi sono "uguali", cioè esistono biezioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\forall n, m$.

Teorema: se V ammette basi, tutte le basi di V hanno lo stesso numero d'el'ti.

(Dim. prossima ora.)

Conseguenza: possiamo definire

Def: se V ammette basi, chiamo dimensione (su $\mathbb{R}$), $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ il numero di elementi di qualsiasi base di V.

Se V non ammette basi pongo $\dim_{\mathbb{R}}(V) = +\infty$.

Es: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$

$\dim_{\mathbb{R}}(M_{m \times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$

$$\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}_{\leq d}[t]) = d+1$$

$$\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}[t]) = +\infty .$$

Prop: Siano V e W sp. vett. di dim. finita.

$\exists\, \phi : V \longrightarrow W$ bijettiva che rispetta le operazioni $\iff \dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W)$.

Cioè: V, W sono "uguali come sp. vett"
se e solo se hanno la stessa dimensione.

<u>Dim</u>: $\Longrightarrow$ Se $\mathcal{B}$ è base di V allora
$\phi(\mathcal{B})$ è base di W con lo
stesso numero di el'ti, dunque
hanno stessa dimensione.

Infatti se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ so che ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

dunque $\phi(v) = x_1 \phi(v_1) + \cdots + x_n \phi(v_n)$;

viceversa se $w \in W$, $v = \phi^{-1}(w)$ ho

$$w = \phi(v) = x_1 \phi(v_1) + \cdots + x_n \phi(v_n)$$

$\xRightarrow{\text{applico } \phi^{-1}}$ $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$

Ho provato che $(\phi(v_1), \dots, \phi(v_n))$ è base e

$$[w]_{\phi(\mathcal{B})} = [\phi^{-1}(w)]_{\mathcal{B}} .$$

(Esercizio: provare separatamente che

$v_1 \dots v_n$ lin. indip $\Rightarrow \phi(v_1) \dots \phi(v_n)$ lin indip

$v_1 \dots v_n$ generatori $\Rightarrow \phi(v_1) \dots \phi(v_n)$ generatori.)

$\Leftarrow$ se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W) = n$

allora V ha base $\mathcal{B}$ con n el.

W ha base $\mathcal{C}$ con m el.

$\Rightarrow$ esistono biiezioni che rispettano operaz.

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Phi_{\mathcal{C}} : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\phi = \phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ \phi_{\mathcal{B}}"] \arrow[dr, "\phi_{\mathcal{B}}"'] & & W \\ & \mathbb{R}^n \arrow[ur, "\phi_{\mathcal{C}}^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

poupo

$\blacksquare$

<u>Es</u>: $V = \mathcal{F}(\{a,b,c\}, \mathbb{R})$

A: $a \longmapsto 1$, $b \longmapsto 0$, $c \longmapsto 0$

B: $a \longmapsto 0$, $b \longmapsto 1$, $c \longmapsto 0$

C: $a \longmapsto 0$, $b \longmapsto 0$, $c \longmapsto 1$

$f \in V \implies f = f(a)\cdot A + f(b)\cdot B + f(c)\cdot C$

infatti:

$$f(a) \stackrel{?}{=} \underbrace{\left(f(a)\cdot A + f(b)\cdot B + f(c)\cdot C\right)(a)}_{\displaystyle \parallel}$$

$$f(a)\cdot \underbrace{A(a)}_{1} + f(b)\cdot \underbrace{B(a)}_{0} + f(c)\cdot \underbrace{C(a)}_{0} \quad \underline{\text{OK}}$$

analogamente coincidono su b e c.

Dunque (A, B, C) è una base di V

$\Longrightarrow$ V è "uguale a $\mathbb{R}^3$ come sp. vett",

ovvero le coord. rispetto a (A, B, C) danno

una bijezione che rispetta le operazioni con $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}(\{a, b, c\}, \mathbb{R}) \ni f \longmapsto \begin{pmatrix} f(a) \\ f(b) \\ f(c) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Resta da provare che due basi diverse dello stesso V hanno lo stesso numero di el.

Basterà provare questo:

Prop: dati V sp. vett. $n, m \in \mathbb{N}$

$v_1, \dots, v_n \in V$ linearmente indipendenti

$w_1, \dots, w_m \in V$ t.c. $v_1, \dots, v_n \in \operatorname{Span}(w_1, \dots, w_m)$

si ha $n \leq m$.

Perché basta? Supponiamo di avere

$(v_1, \dots, v_n)$ base di V, cioè $v_1, \dots, v_n$ lin. indip

$V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$

$(w_1, \dots, w_m)$ base di V, cioè $w_1, \dots, w_m$ lin. indip

$V = \text{Span}(w_1, \dots, w_m)$

Allora ho $\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\text{l. ind.}} \in V = \text{Span}(w_1, \dots, w_m)$

$\underset{\text{Prop}}{\Longrightarrow} n \leq m$

2

$$\underbrace{w_1,\dots,w_m}_{\text{l. ind.}} \in V \in \mathrm{Span}(v_1,\dots,v_n) \xRightarrow[\text{Prop}]{} m \le n$$

Dunque $m = n$.

Resta da provare la Prop.