Esercitazione 18/10/16

Esercizio 4.1.1.

Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^2$, considerare i vettori $v, w_1, \dots, w_k$ indicati, e stabilire se v appartenga a $\mathrm{Span}(\{w_1, \dots, w_k\})$. In tal caso stabilire se l'espressione di v come combinazione lineare dei w_i sia unica.

a) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\text{Span}(\{w_1, \dots, w_k\}) = \{\lambda_1 \cdot w_1 + \dots + \lambda_k \cdot w_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$

$v \in \text{Span}(\{w_1, \dots, w_k\}) \Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che $v = \lambda_1 \cdot w_1 + \dots + \lambda_k \cdot w_k$.

- In (a) $\text{Span}(\{w_1\}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2\lambda \\ 5\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Il fatto che $v \in \text{Span}(\{w_1\})$ si traduce nel seguente sistema:

$$\begin{cases} (1) \quad -2\lambda = 3 \\ (2) \quad 5\lambda = -4 \end{cases} \rightarrow \text{Non ha soluzione}$$

Da 1) $\lambda = -\frac{3}{2}$ e sostituendolo in 2)

$5 \cdot \lambda = -\frac{15}{2} \neq -4$. Quindi $v \notin \mathrm{Span}(\{w_1\})$.

b) $v = \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -2 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Span}(\{w_1\}) = \left\{ \begin{pmatrix} -3\lambda \\ \sqrt{6}\lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

$$\begin{cases} 1) & -3\lambda = \sqrt{6} \\ 2) & \sqrt{6}\lambda = -2 \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione!

$\lambda = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

Da 1) $\lambda = -\frac{\sqrt{6}}{3}$. Da 2) $\sqrt{6} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -2$ ok

Quindi $v \in \mathrm{Span}(\{w_1\})$

e la scrittura è unica.

c) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Span}(\{w_1, w_2\}) = \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$v \in \mathrm{Span}(\{w_1, w_2\}) \Leftrightarrow$ il seguente sistema ha soluzione

$$\begin{cases} 1)\ 4\cdot\lambda_1 + 3\lambda_2 = 3 \\ 2)\ -11\cdot\lambda_1 + 8\cdot\lambda_2 = 7 \end{cases}$$

Da 1) $\lambda_1 = \frac{3-3\lambda_2}{4} = \frac{3}{4}(1-\lambda_2)$

Da 2) $7 = -11\cdot\frac{3}{4}(1-\lambda_2) + 8\cdot\lambda_2 = -\frac{33}{4} + \frac{65}{4}\cdot\lambda_2$

$\lambda_2 = \frac{61}{65}$, $\lambda_1 = \frac{3}{65}$ $\Rightarrow$ Il sistema ha soluzione

Verifichiamo che w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti:

Cerchiamo soluzioni a

$$\begin{cases} (1)\ \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 3 = 0 & \rightarrow \text{da 1) segue } \lambda_1 = -\frac{3}{4} \cdot \lambda_2 \\ (2)\ -11 \cdot \lambda_1 + 8 \cdot \lambda_2 = 0 & \rightarrow \text{sostituendo in 2) otteniamo} \end{cases}$$

$$-11 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \lambda_2 + 8 \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \text{ e di conseguenza } \lambda_1 = 0$$

Esempio di vettori non linearmente indipendenti

In $\mathbb{R}^2$ $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

w_1, w_2, w_3 non sono linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = w_1 + w_2 - w_3$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\to$ ha soluzioni $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ con i λ_i non nulli:

Ad esempio $(1, 1, -1)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es. 4.1.5. Nello spazio $\mathbb{R}^3$, consideriamo il sottospazio W definito da $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0\}$, e i vettori $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dire se i w_i siano un sistema di generatori per W, cioè se $W = \mathrm{Span}(\{w_1, w_2, w_3\})$, e stabilire se ogni $w \in W$ abbia un'unica espressione come combinazione lineare dei w_i.

Notiamo che w_1, w_2, w_3 appartengono a W

Dalla definizione di W, notiamo che $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W \iff$

$\iff x_1 = 2x_3 - 3x_2$

Cioè $W = \left\{ \begin{pmatrix} 2x_3 - 3x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

Mostriamo che $W = \text{Span}(\{w_1, w_2\})$

Sia $v \in W$ e cerchiamo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 \cdot w_2$

$$\begin{cases} 1) \; 2x_3 - 3x_2 = -\lambda_1 + 3\cdot\lambda_2 \\ 2) \; x_2 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ 3) \; x_3 = \lambda_1 \end{cases}$$

Dati

Incognite

Verifichiamo che questo sistema ha soluzione per ogni scelta di x_2 e x_3 in $\mathbb{R}$

Da 3) segue $\lambda_1 = x_3$. Da 2) $x_2 = x_3 - \lambda_2$ da cui segue $\lambda_2 = x_3 - x_2$

Sostituendo le espressioni per λ_1 e λ_2 trovate, la 1) è automaticamente verificata.

$\Rightarrow$ Ogni vettore di W si scrive, come combinazione lineare di w_1 e w_2.

In particolare $w_3 \in \mathrm{Span}(\{w_1, w_2\})$ (poiché $w_3 \in W$)

$W = \mathrm{Span}(\{w_1, w_2\}) = \mathrm{Span}(\{w_1, w_2, w_3\})$

w_3 non si scrive in modo unico come combinazione lineare di w_1, w_2 e $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow w_3 = 3 \cdot w_1 + w_2 + 0 \cdot w_3$

$= 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3$

Le due diverse scritture di w_3 come combinazione lineare di $\{w_1, w_2, w_3\}$

Es. 4.1.7.

$V = \mathbb{R}[t]$,

$W = \mathbb{R}_{\leq 1}[t]$. $w_1 = 3-2t$, $w_2 = 1+5t$.

Dire se w_1 e w_2 sono un sistema di generatori per W e se sono linearmente indipendenti.

Osservazione: $w_1, w_2 \in W$ ok

Sia $p \in W$ $p(t) = a + b \cdot t$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Vogliamo verificare se esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $p = \lambda_1 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2$

Cioe' $a+bt = \lambda_1(3-2t)+\lambda_2(1+5t) = (3\lambda_1+\lambda_2)+(-2\cdot\lambda_1+5\cdot\lambda_2)\cdot t$

Equivalentemente

$$\begin{cases} 1)\ 3\cdot\lambda_1+\lambda_2=a \\ 2)\ -2\lambda_1+5\lambda_2=b \end{cases}$$

Verifichiamo che questo sistema ha soluzioni $\forall\ a,b\in\mathbb{R}$.

Da 1) $\lambda_2 = a-3\cdot\lambda_1$. Da 2) segue $5(a-3\lambda_1)-2\lambda_1=b$

Cioe' $5a-17\lambda_1=b$, quindi $\lambda_1=\frac{5a-b}{17}$. $\lambda_2=(a-3\lambda_1)$

Cioè il sistema ha sempre soluzioni (λ_1, λ_2), e inoltre le soluzioni sono uniche (cioè w_1, w_2 sono lin. indipendenti)

Sostituite $a=0$, $b=0$ ottenete $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Es. 4.2.5. Sia $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0\}$. Esibire una base (cioè un sistema di generatori di W linearmente indip.).

① Cerchiamo un vettore non nullo in W, ad esempio

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Chiaramente $v_1 \in W$

(2) Notiamo che v_1 <u>non genera</u> W. $\mathrm{Span}(\{v_1\}) \subsetneq W$

Ad esempio $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ appartiene a W ma $v_2 \neq \lambda \cdot v_1 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Verifichiamo se $\mathrm{Span}(\{v_1, v_2\}) = W$

Dalla definizione di $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0\}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tali che $x = \begin{pmatrix} 4a \\ 4b \\ 7a + 5b \end{pmatrix}$

$x \in \mathrm{Span}(\{v_1, v_2\}) \iff$ il seguente sistema ammette soluzione:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 1)\ 5\lambda_1 = 4 \cdot a \\ 2)\ -7\lambda_1 + 4\lambda_2 = 4b \\ 3)\ 5\lambda_2 = 7a + 5b \end{cases}$$

Da 1) $\lambda_1 = \dfrac{4a}{5}$

Da 2) segue che $\lambda_2 = \dfrac{7}{5}a + b$

Il sistema ha soluzioni $\Rightarrow W = \mathrm{Span}(\{v_1, v_2\})$

Inoltre v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti (se poniamo $a = b = 0$

otteniamo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).

4.2.6) $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 1)\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2)\ -4x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{array} \right\}$

Esibire una base di W. Sia $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W$

Da 2) segue $x_2 = 4x_1 - 7x_3$, equivalentemente $2x_2 = 8x_1 - 14x_3$

Da 1) segue $2x_2 = 5x_3 - 3x_1$ $\qquad 11 \cdot 19a = 19 \cdot 11a$

$$8x_1 - 14x_3 = 5x_3 - 3x_1 \iff 11 \cdot x_1 = 19 \cdot x_3$$

Quindi $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in W \iff x = \begin{pmatrix} 19a \\ -a \\ 11a \end{pmatrix}$ per qualche $a \in \mathbb{R}$ (*)

(per x_2 $2x_2 = 5x_3 - 3x_1 = 55a - 57a = -2 \cdot a) \Rightarrow x_2 = -a$

Da (*) segue che $x \in W \iff x = a \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ è una base per W $\square$

Es. 4.2.21) $W = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq d}[t] : p(-t) = p(t)\}$.

Esibire una base.

$p(t) \in \mathbb{R}[t]$ $p(t) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot t^n}_{} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} \cdot t^{2n}}_{} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} \cdot t^{2n+1}}_{}$

Se vogliamo che $p(t)=p(-t)$ dove valere:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}(-t)^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}(-t)^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} \cdot t^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} -a_{2n+1} \cdot t^{2n+1}$$

$p(t)=p(-t)$ e' verificata se e solo se $\forall k$ dispari il coeff. di grado k e' nullo ($a_k=0$)

Una base di $W=\{p(t)\in \mathbb{R}_{\leq 4}[t] \mid p(t)=p(-t)\}$ e' data da $\{t^{2n} \mid n \in \mathbb{N}, 2n \leq d\} = \{1, t^2, t^4, t^6, \dots\}$

Esercizio: Verificare in modo analogo che una base di $W = \{p \in \mathbb{R}_{\leq d}[t] \mid p(-t) = -p(t)\}$ è data dai monomi della forma $\{t^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}, 2n+1 \leq d\}$.