Algebra Lineare 15/11/16

merc : S + P + P

giov 11:30–12:30 (PN 9) S

$$\_\_\_\_\_ \circ \_\_\_\_\_$$

<u>Ese 1</u> : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \qquad g \circ f = id_X$

$\Rightarrow f$ iniettiva, g suriettiva.

<u>Sol</u> : supponiamo $f(x_1) = f(x_2)$; allora

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$\overset{\shortparallel}{x_1}$ $\overset{\shortparallel}{x_2}$ ✓

Supponiamo $x \in X$; allora $g(f(x)) = x \Rightarrow x \in \text{Im}\, g$ ✓

<u>Ese 2</u>: $f: X \to Y$ invertibile $\Leftrightarrow$ bijettiva.

<u>Sol</u>: invertibile: $\exists g: Y \to X$ t.c.

$g \circ f = id_X$ $\quad \left(\underset{\text{Ese 1}}{\Longrightarrow} f \text{ iniettiva} \right)$

$f \circ g = id_Y$ $\quad \left(\underset{\text{Ese 1}}{\Longrightarrow} f \text{ surgettiva} \right)$

ho provato che f è bigettiva.

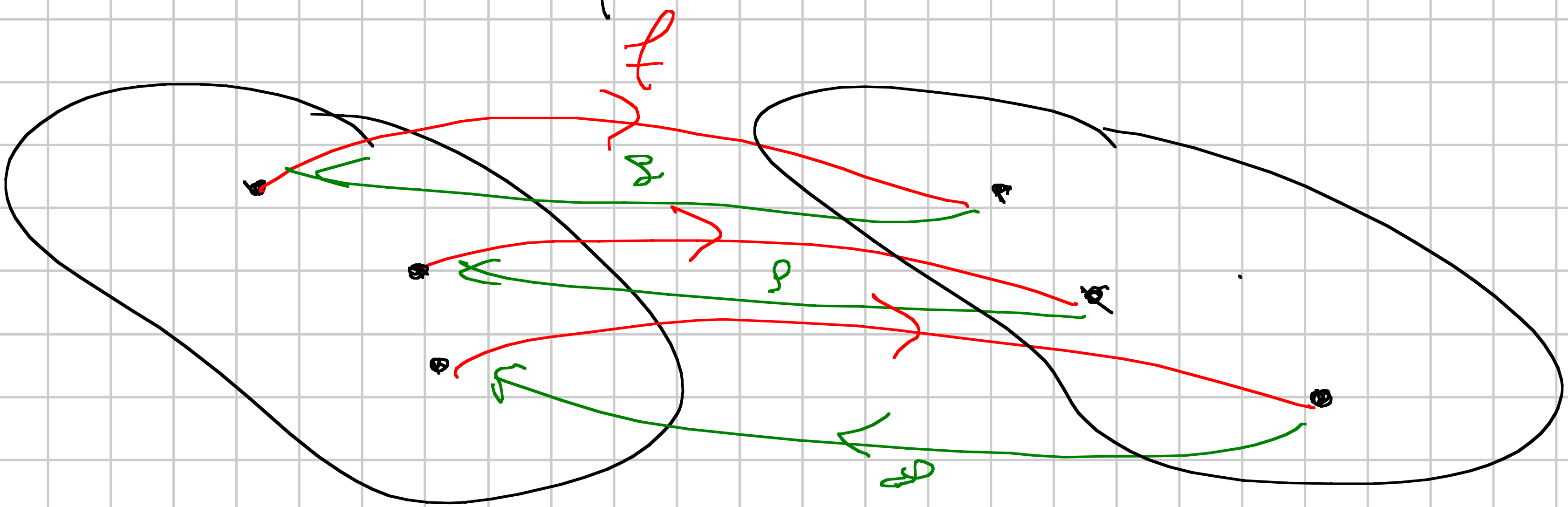
Viceversa sia f bigettiva: $\forall y \in Y$ esiste unico $x \in X$ t.c. $f(x) = y$. Posso allora porre $g(y) = x$ e ho $g : Y \to X$. Provo che:

- $g \circ f = id_X$ ovvero $g(f(x)) = x \quad \forall x \in X$

infatti $g(f(x))$ è quel punto $x' \in X$ t.c. $f(x') = f(x)$: allora $x' = x$

- $f \circ g = id_Y$ ovvero $f(g(y)) = y$ infatti ho dichiarato $g(y) = x$ se $f(x) = y$

dunque $f(g(y)) = y$.



Ese: l'inversa di $f: X \to Y$ se esiste è unica.

Sol: supponiamo di avere due inverse $g, h: Y \to X$ cioè

$$g \circ f = \underbrace{h \circ f}_{} = id_X \quad , \quad \underbrace{f \circ g}_{} = f \circ h = id_Y .$$

Allora:

$$h = h \circ id_Y = h \circ (f \circ g) =$$
$$= (h \circ f) \circ g = id_X \circ g = g .$$

Oss: abbiamo provato che se f ha una inversa a dx (g) e una a sx (h) allora esse coincidono.

Ese: se $f: X \to Y$ è invertibile ed ho $g: Y \to X$ con $g \circ f = id_X$ oppure $f \circ g = id_Y$ allora $g = f^{-1}$.

"Se so che f ha una inversa, mezza def. di inversa implica l'altra mezza"

Sol: $g \circ f = id_X \Rightarrow (g \circ f) \circ f^{-1} = id_X \circ f^{-1}$

$\Rightarrow g \circ (f \circ f^{-1}) = f^{-1} \Rightarrow g \circ id_Y = f^{-1} \Rightarrow g = f^{-1}$

Altra analoga.

Ese: esibire un esempio di $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$

con $g \circ f = id_X$ ma f e g non invertibili.

Sol: so che se trovo un esempio f è iniettiva e g suriettiva. $\quad X = [0,+\infty) \quad Y = \mathbb{R}$

$f(t) = \sqrt{t} \quad g(t) = t^2$

$(g \circ f)(t) = g(\sqrt{t}) = (\sqrt{t})^2 = t \Longrightarrow g \circ f = id_X$

f non è surgettiva $(-1 \notin \mathrm{Im} f)$

g non è iniettiva $(g(+1) = g(-1))$

<u>Att</u>: $(f \circ g)(t) = f(t^2) = \sqrt{t^2} = |t|$

Altra sol: $X = Y = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_0, a_1, a_2, \dots) : a_i \in \mathbb{R}\}$

$= \{(a_n)_{n=0}^{+\infty} : a_i \in \mathbb{R}\}$

$f\,(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$

$g\,(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$

$(g \circ f)(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$

$(f \circ g)(a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$

$$\Longrightarrow f \circ g \neq \mathrm{id}_X$$

$$(g \circ f)(a_0, a_1, a_2, \ldots) = g(f(a_0, a_1, a_2, \ldots))$$

$$= g(0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

$$= (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

Ricordo: $A \in M_{m \times n}$ $\quad f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f_A(x) = A \cdot x$$

$f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}$

Inoltre: $[f_A]_{\mathcal{E}^{(n)}}^{\mathcal{E}^{(m)}} = A$

da cui la scelta di scrivere A al posto di f_A.

Ne segue: $\quad [f_A \circ f_B]_{\mathcal{E}^{(n)}}^{\mathcal{E}^{(k)}} = [f_A]_{\mathcal{E}^{(m)}}^{\mathcal{E}^{(k)}} \cdot [f_B]_{\mathcal{E}^{(n)}}^{\mathcal{E}^{(m)}}$

Prop: $[g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

Cioè: la composizione di applicaz. corrisponde al prodotto fra matrici se esse sono prese rispetto "alle stesse basi".

Dim: $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di U

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ base di W

$\mathcal{D} = (z_1, \dots, z_k)$ base di Z

Sia $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = X$ cioè $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} w_i$

$[g]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} = Y$ cioè $g(w_i) = \sum_{p=1}^{k} y_{pi} z_p$

$$(g \circ f)(v_j) = g(f(v_j)) = g\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} w_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_{ij} f(w_i) = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \sum_{p=1}^{k} y_{pi} z_p$$

$$= \sum_{p=1}^{k} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} y_{pi} x_{ij} \right)}_{(Y \cdot X)_{pj}} \cdot z_p$$

$$\Rightarrow [g \circ f]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} = Y \cdot X.$$

$\blacksquare$

Ricordo: (1) Se $f: V \to W$ è lineare invertibile allora $\dim(V) = \dim(W)$

(2) Se $\dim(V) = \dim(W)$ e $f: V \to W$ è iniettiva o surgettiva allora è invertibile.

Oss: in tal caso f^{-1} è lineare:

$w_1, w_2 \in W \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \qquad f^{-1}(w_1) = v_1 \quad f^{-1}(w_2) = v_2$

$$f^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) \overset{?}{=} \underbrace{\lambda_1 f^{-1}(w_1) + \lambda_2 f^{-1}(w_2)}_{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}$$

Sì se e solo se

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \overset{?}{=} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$

$$\text{//}$$

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$
$$\parallel$$
$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$

Sì

Oss: se $\dim V = \dim W$, $f : V \to W$
$g : W \to V$ lineari t.c. $g \circ f = id_V$ oppure $f \circ g = id_V$
allora f, g sono invertibili e $g = f^{-1}$, $f = g^{-1}$.

Caso di $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$; $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ "$=$" $M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$A = f_A \longleftrightarrow A$$

La funzione identità $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è quella associata alla matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Def: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è invertibile se esiste $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ t.c

$$B \cdot A = I_n \quad \text{e} \quad A \cdot B = I_n$$

In tal caso B è l'inversa di A, indicata A^{-1}.

Oss: A può essere invertibile solo se $m = n$ (A quadrata).

Oss: Se ho A quadrata $n \times n$ sapendo

$B \cdot A = I_n$ oppure $A \cdot B = I_n$

allora deduco l'altra e quindi

che $B = A^{-1}$.

Q: Come cambia $[v]_{\mathcal{B}}$ se cambio $\mathcal{B}$?

Q: Come cambia $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ se cambio $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$?

Reinterpretazione delle def. di $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$:

- $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ si ha $[v]_{\mathcal{B}} = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

se $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$$= (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se $v_1, \dots, v_n$ fossero in $\mathbb{R}$
sarebbe il solito righe x col
$1 \times n \cdot n \times 1 = 1 \times 1$

Per $v_1, \dots, v_n \in V$ lo definisco
in modo che soddisfi le stesse regole

Nota: se $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$

$$(v_1, \dots, v_n) \in M_{m \times n}$$

e in tal caso ancora $\cdot$ è il prod riga x col e vale

$$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Riscrivo la def di coordinate:

$$[v]_{\mathcal{B}} = x \quad \text{se} \quad v = \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\mathcal{B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= x}$$

Dunque la def di $[v]_{\mathcal{B}}$ è

$$v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

Cioè $[v]_{\mathcal{B}}$ è quell'unico vettore di $\mathbb{R}^n$ t.c. vale l'uguaglianza $v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

Def di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$: $f: V \to W$

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ base di W

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = X$ se $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} w_i$

$= x_{1j} w_1 + \dots + x_{mj} w_m$

$$= \underbrace{(w_1, \dots, w_m)}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}}_{\substack{j\text{-esima} \\ \text{colonna di } X}}$$

ovvero se $\underbrace{(f(v_1), \dots, f(v_m))}_{f \cdot (v_1, \dots, v_m)} = \mathcal{C} \cdot X$

Se f fosse un numero e i v_j anche
è il $\cdot$ solito

In generale lo definisco così perché
uso la stessa regola

Riscrivo la def.: $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = X \quad \Leftarrow$

$$f \cdot \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\mathcal{B}} = \underbrace{(w_1, \dots, w_m)}_{\mathcal{C}} \cdot X$$

Dunque la def di $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ è

$$f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

$\hookrightarrow$ cioè $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ è quell'unica matrice $m \times n$ t.c. vale

$$f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

Oss: nel caso astratto

$f \cdot \mathcal{B}$ è def come $f \cdot (v_1, \dots, v_n) = (f(v_1), \dots, f(v_n))$

ma se $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ e $f \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

allora

$$\underset{M_{m\times n}}{\underset{\cap}{f}} \cdot \underset{M_{n\times n}}{\underset{\cap}{\mathcal{B}}} = \underset{M_{m\times m}}{\underset{\cap}{\mathcal{C}}} \cdot \underset{M_{m\times n}}{\underset{\cap}{[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}}}$$

sono entrambi i soliti prod righe x col.

Ridimostro: $[g \circ f]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} = [g]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$:

cerco quella matrice t.c.

$$(g \circ f) \cdot \mathcal{B} = \mathcal{D} \cdot [g \circ f]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}}$$

$$(g \circ f) \cdot \mathcal{B} = g \cdot (f \cdot \mathcal{B}) = g \left(\mathcal{C} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= (g \cdot \mathcal{C}) \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \left(\mathcal{D} \cdot [g]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \right) \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

$$= \mathcal{D} \cdot \left([g]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \right)$$

$$\Longrightarrow [g \circ f]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} = [g]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{C}} \cdot [f]^{\mathcal{D}}_{\mathcal{B}} \quad \blacksquare$$

Cambiamenti di base:

Siano $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ $\mathcal{B}' = (v_1', \dots, v_n')$ due basi di V. Chiamo matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è $A = (a_{ij})$ t.c.

$$v_j' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \quad (\text{cioè } \mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A)$$

<u>Oss</u>: la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è $[\,id_V\,]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$.

<u>Prop</u>: se A è la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ allora A è invertibile e

A^{-1} è la matrice di cambio di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Dim: sia M la matrice di cambio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, cioè

$$M = [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \quad ; \quad \text{ora}$$

$$A \cdot M = [id_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

$$= [id_V \circ id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$$

Analogamente $M \cdot A = I_n$. $\square$

Teo: se $\mathcal{B}'$ è ottenuta da $\mathcal{B}$ con matrice di cambiamento A, allora

$$[v]_{\mathcal{B}'} = A^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}} .$$

Dim: $[v]_{\mathcal{B}'}$ è quel vettore tale che

$$v = \mathcal{B}' \cdot [v]_{\mathcal{B}'} .$$

So che $\quad v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

inoltre $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A$ ma $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot A^{-1}$

(Enunciato Prop.:

se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A$ allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot A^{-1}$)

$$\Rightarrow v = (\mathcal{B}' \cdot A^{-1}) \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}' \cdot \underbrace{(A^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}})}_{\text{dunque lui è } [v]_{\mathcal{B}'}}$$

$\boxed{\text{K!!}}$

Rienuncio: $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A \Rightarrow [v]_{\mathcal{B}'} = A^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

Prop: se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A$ e $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cdot M$

allora $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot A$.

Dim: so che $f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

La $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$ è quella matrice t.c. $f \cdot \mathcal{B}' = \mathcal{C}' \cdot [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'}$.

$$f \cdot \mathcal{B}' = f \cdot (\mathcal{B} \cdot A) = (f \cdot \mathcal{B}) \cdot A$$

$$= \left(\mathcal{C} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right) \cdot A = \mathcal{C}\left([f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot A\right)$$

$$\overset{\text{prop}}{=} (\mathcal{C}' \cdot M^{-1}) \cdot \left([f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot A\right)$$

$$= \mathcal{C}' \cdot \underbrace{\left(M^{-1} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot A\right)}_{\text{dunque lui è } [f]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}.}$$

$\boxtimes$