Algebra Lineare 14/12/16

$\boxed{27}$ (1)

$$X : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - kx_3 + x_4 = 0 \\ kx_1 - 3x_2 + 3x_3 + (2k+3)x_4 = 0 \end{cases}$$

(A) $\dim X = ?$

Sist. omog. di 3 equaz. in 4 incognite.

Matrice A ha rango $r \leq 3$; $\dim X = 4 - r$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -k & 1 \\ k & -3 & 3 & 2k+3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow r \geq 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -k \\ k & -3 & 3 \end{pmatrix} = -3 + 2k^2 + k - 3 - 3k + 6$$

$$= 2k^2 - 2k = 2k(k-1)$$

Nullo per $k=0$ e $k=1$.

$k=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & +3 \end{pmatrix}$$

$9-3-3 \neq 0$

$r=3$

$k=1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$-5+1+9$
$+3-5-3$ $=0$

$r=2$

Conclusione: $\dim X = 1$ per $k \neq 1$

$\dim X = 2$ per $k=1$

(B) Per $k=-1$ trovare $X \cap \{x_4 = 1\}$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - kx_3 + x_4 = 0 \\ kx_1 - 3x_2 + 3x_3 + (2k+3)x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$$

Risolvere ...

(c) Per $k=1$ provare che

$$f(x) = \begin{pmatrix} 4x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

definisce una $f : X \to X$ lineare.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineare.

Se verifico che $f_A(X) \subset X$ posso definire $f = f_A\big|_X^X$ che è lineare.

Da vedere: $\boxed{f_A(X) \subset X}$

$$X : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Per vedere che $f_A(X) \subset X$ basta trovare una base v_1, v_2 di X e verificare che $f(v_1), f(v_2) \in X$. Base di X:

- $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 - x_4 \\ \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_2 = 2x_3 + 2x_4 \\ \end{cases}$

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 3x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per concludere:

calcolo $A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$ e $A \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$

e verifico che tali vettori soddisfano le eq. di X.

- $X: \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Cerchiamo una base di X con vettori aventi una coord. nulla: sistema di 2 equaz. in 3 incognite che risolvo col metodo dei det 2×2.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \cancel{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix}\right)$$

4 elem. di X prendendo due dei quali ho una base

$\boxed{27}$ 2

$$E: \quad i z_1 + 2(1+i) z_2 + (1-2i) z_3 = 1-i$$

A Troviamo eq. param:
$$\begin{pmatrix} -1-i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2(1+i) \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-2i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \right)$$

(B) Esibire base $\mathcal{B}$ di X = giacitura di E fatta da vettori di $\{ z \in \mathbb{C}^3 : z_2^2 + 1 = 0,\ z_3 = 3+i \}$

$v_{1,2}$: $\begin{cases} i z_1 + 2(1+i) z_2 + (1-2i) z_3 = 0 \\ z_2 = \pm i \\ z_3 = 3+i \end{cases}$ calcoli...

(C) provare che $v = \begin{pmatrix} 7i - 5 \\ 2 - i \\ i - 1 \end{pmatrix} \in X$ e trovare $[v]_{\mathcal{B}}$.

$$i(7i-5) + 2(1+i)(2-i) + (1-2i)(i-1)$$

$$= -7 + 4 + 2 - 1 + 2$$
$$\quad - 5i - 2i + 4i + i + 2i = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 7i-5 \\ 2-i \\ i-1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ i \\ 3+i \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ -i \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\det\begin{pmatrix} 2-i & -i \\ 1-i & 3+i \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 3+i & 3+i \end{pmatrix}} \qquad \beta = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 3+i & 1-i \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} i & -i \\ 3+i & 3+i \end{pmatrix}}$$

calcoli...