Esercitazione 12/10/16

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $W \subset V$

per verificare che W è un sottospazio vettoriale è sufficiente verificare che:

1) $0 \in W$
2) $\forall\, w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$
3) $\forall\, w \in W, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot w \in W$

Es. 3.2.1. Sia $V = \mathbb{R}^n$ e si consideri il sottoinsieme $W \subseteq \mathbb{R}^n$ descritto. Determinare se W e' un sottospazio vettoriale.

a) $W = \left\{ x : \sum_{j=1}^{n} \sqrt{j-1} \cdot x_j = 0 \right\}$ $\quad 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \sqrt{2} \cdot x_3 + \dots + \sqrt{n-1} \cdot x_n = 0$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Piu' in generale:

Sia $W = \left\{ x : \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j = 0 \mid a_j \in \mathbb{R} \right\}$

Allora W e' un sottospazio vettoriale

- $0 \in W$ ok
- Siano $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{= x} \in W$ e $\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{= y} \in W$

$$x+y = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (x_i+y_i) = 0 \leftarrow \text{verifichiamo questa}$$

$$\hookrightarrow = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j}_{\substack{\| \\ 0 \\ \text{poiché } x \in W}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot y_j}_{\substack{\| \\ 0 \text{ poiché } y \in W}} = 0 \Rightarrow x+y \in W$$

- Sia $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W$ $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j = 0$

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$ $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot (\lambda x_j) \overset{*}{=} 0$ quindi

$$* = \lambda \cdot \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j \right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} = \lambda \cdot 0 = 0 . \quad \square$$

b) $W_i = \left\{ x : \sum_{j=1}^{n} x_j^j = 0 \right\} \quad (n > 1)$

W non e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$?

Non vale la chiusura per moltiplicazione

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W \quad x \neq 0$

$m = \max\{ j \mid x_j \neq 0 \}$ $\quad \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\lambda}} \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$

$f(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^j \cdot x_j^j$ e' un polinomio non nullo in λ

$p(\lambda) = a_0 + a_1 \cdot \lambda + \dots + a_n \cdot \lambda^n \quad p(\lambda) \equiv 0 \Leftrightarrow a_i = 0 \ \forall i$

poiche' $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e' non nullo, esiste j tale $x_j \neq 0$

$\Rightarrow \exists j$ tale che $x_j^j \neq 0$

$\Rightarrow f(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \exists\, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\bar{\lambda}) \neq 0$

$\sum_{j=1}^{n} \bar{\lambda}^{j} \cdot x_j^{j} \neq 0 \Rightarrow x \in W$ ma $\bar{\lambda} \cdot x \notin W$ $\square$

c) $W = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 = x_2^2\}$ $(n \geq 2)$

Se $x \in W \Rightarrow \lambda x \in W$ $\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ $x_1^2 = x_2^2$

$\lambda^2 x_1^2 = \lambda^2 \cdot x_2^2$ $\quad (\lambda x_1)^2 = (\lambda \cdot x_2)^2$ cioè $\lambda^2 x_1^2 = \lambda^2 x_2^2$

Chiusura per moltiplicazione è verificata

Non è verificata chiusura per +

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

. $x \in W$ e $y \in W$

$1^2 = (-1)^2 = 1$

Però $x+y \notin W$

$$x+y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2^2 \neq 0^2 \quad \square$$

d) $W = \{x : x_1^3 = x_2^3\}$. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x^3 = y^3 \iff x = y$ *

$W = \{x : x_1 = x_2\}$ per *

$\Updownarrow$

$x_1 - x_2 = 0$, $\iff 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$

$\hookrightarrow$ lineare omogenea $\Rightarrow$ W e' sottospazio vettoriale
in $x_1, \dots, x_n$

e) $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \cos(x_1 + \dots + x_n) = 1\}$

Fatto: $\cos(y) = 1 \iff y = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$

$$2k\pi = k \cdot (2\pi)$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W \iff x_1 + \dots + x_n = 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$

Se $x_1 + \dots + x_n = 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$ $\lambda x_1 + \dots + \lambda x_n = \lambda(x_1 + \dots + x_n) = \lambda \cdot 2k\pi$

$x \in W,\ \lambda \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda \cdot x \notin W$ ($\lambda \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda \cdot 2k\pi$ non è multiplo di 2π)

$$\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x \qquad \lambda = \frac{1}{2} \qquad \lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda \cdot x \notin W$$

$\Rightarrow W$ non è un sottospazio vettoriale

Es. 3.2.2. $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$

a) $W = \{ A : (A)_{1,1} \cdot (A)_{m,n} = 0 \}$

Non e' s.s.vett.

$$\underset{\in W}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & 0 \end{bmatrix}} + \underset{\in W}{\begin{bmatrix} 0 & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix}} = \underset{\notin W}{\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix}}$$

(b) $W = \left\{ A : \sum_{j=1}^{\min(m,n)} (A)_{j,n+1-j} = 0 \right\}$ W e' s.s.v.

c) $W = \left\{ A : \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\sqrt{i} - \sqrt{j}}{\sqrt{i} + \sqrt{j}} (A_{i,j}) = 0 \right\}$ W è s.s.v.

Ogni sottoinsieme di $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ definito da equazione omogenea di 1° grado nei coefficienti $(A)_{i,j}$ è un sottospazio vettoriale.

$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot (A)_{i,j} = 0$ (esercizio)

d) $W = \left\{ A : \sum_{j=1}^{\min\{m,n\}} (A)_{j,j}^{2} = 0 \right\}$

$\sum_{j=1}^{n} (A)_{j,j}^{2} = 0$ vera $\iff (A)_{j,j} = 0 \quad \forall\, j = 1 \ldots \min\{m,n\}$

$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W$ è sp. vett.

e) $W = \{A : |(A)_{i,j}| \le 7 \text{ per } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$

$$\begin{bmatrix} 7 & \times & \times & \times \\ \times & \ddots & & \times \\ \times & & \ddots & \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} = M \qquad 2 \cdot M = \begin{bmatrix} 14 & \cdots & \cdots & \cdots \\ - & & - & \\ - & - & - & \\ - & - & - & \end{bmatrix} \notin W$$

3.2.3. $V = \mathbb{R}[t]$

a) $W = \{p(t) : p(-3) + p''(2) = 0\}$ è s.s.v.

Notiamo che, $\forall p(t), q(t) \in \mathbb{R}[t]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ valgono:

1) $(p+q)(a) = p(a) + q(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

somma tra polinomi

somma in $\mathbb{R}$

2) $(\lambda p)(a) = \lambda \cdot p(a)$

3) $(p+q)'(x) = p'(x) + q'(x)$

Similmente $(p+q)^{(n)}(x) = p^{(n)}(x) + q^{(n)}(x)$

W è s.s.v. $\quad$ 4) $(\lambda \cdot p(x))' = \lambda \cdot p'(x)$

$0 \in W$,

$p(x), q(x) \in W$. Verifichiamo

$$(p+q)(-3)+(p+q)''(2) \overset{\text{per le proprietà appena elencate}}{=} \underbrace{p(-3)+p''(2)}_{\substack{= 0 \\ \text{poiché } p \in W}} + \underbrace{q(-3)+q''(2)}_{\substack{= 0 \\ \text{poiché } q \in W}} = 0$$

Segue che $(p+q)(x) \in W$

Uguale per $\lambda \cdot p(x)$