Algebra Lineare 8/11/16

17/11 + 1/12 11:30 - 12:30 (PN?)

recuperi

____ o ____

Piccole modifiche alle regole d'esame

$f: V \to W$ lineare se $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$.

— o —

Somme dirette e proiezioni

$\bar{V}$ sp. vett. fissato; $X, Y \subset \bar{V}$ stsp; dico che $\bar{V}$ è somma diretta di X e Y, scrivo $V = X \oplus Y$ se $X \cap Y = \{0\}$ e $X + Y = \bar{V}$.

Oss: se $V = X \oplus Y$, per Grassmann abbiamo

$$\dim(X) + \dim(Y) = \dim(\underbrace{X \cap Y}_{\{0\}}) + \dim(\underbrace{X+Y}_{V})$$
$$= \dim(V)$$

Oss: sapendo che $\dim(X) + \dim(Y) = \dim(V)$ e che $X \cap Y = \{0\}$ si conclude (per Gr.) che $\dim(X+Y) = \dim(V)$ cioè che $V = X \oplus Y$.

Es: $V = \mathbb{R}^3$; $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 7x - 4y + 3z = 0 \right\}$

$$Y = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$\dim X = 2 \qquad \dim Y = 1$

$$X \cap Y = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} : 7(2t) - 4(5t) + 3(-t) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} : (14 - 20 - 3)t = 0 \right\} = \{0\}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Prop: se $V = X \oplus Y$ allora ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in X, y \in Y$.

Dim: Ipotesi $X \cap Y = \{0\}$ e $X + Y = V$.

$$\Downarrow$$

ogni $v \in V$ si scrive come $v = x + y$.

Supponiamo $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

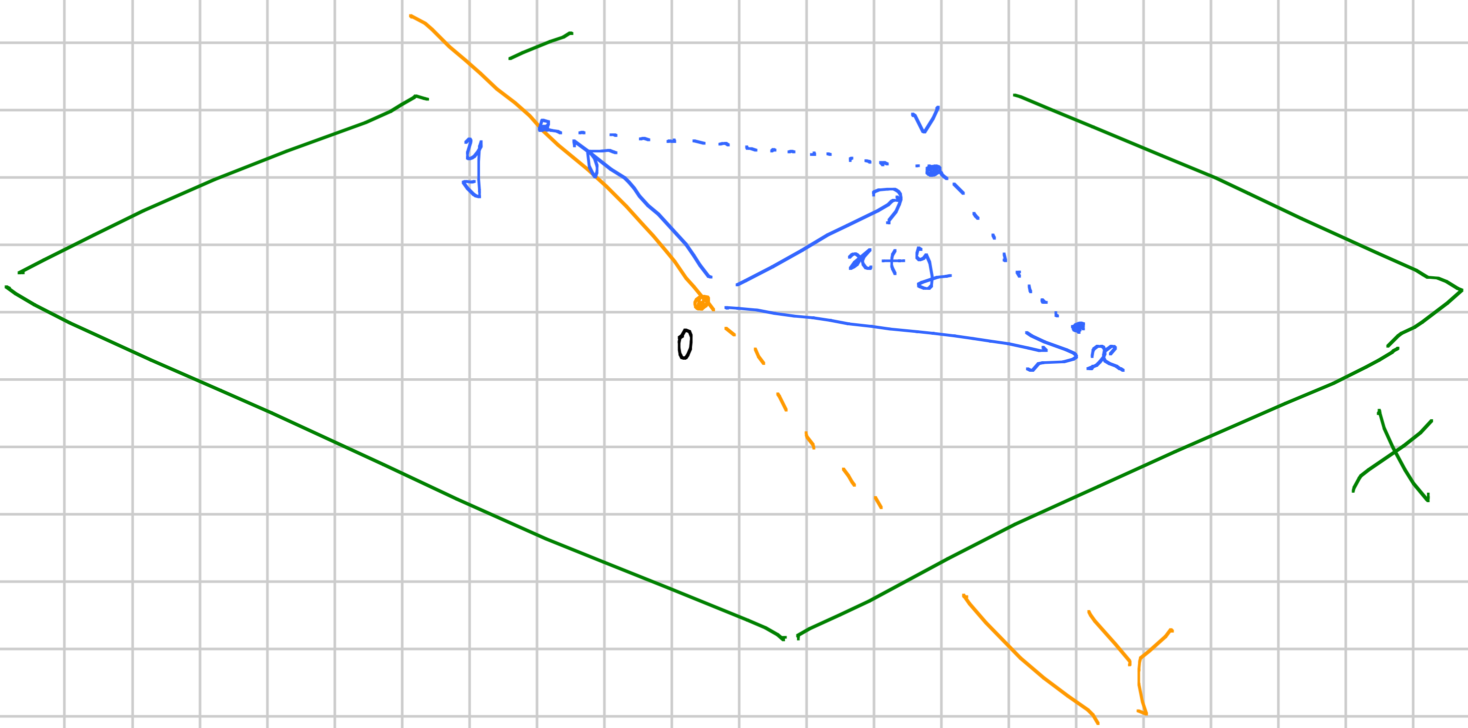
$$\Longrightarrow \underbrace{x_1 - x_2}_{\in X} = \underbrace{y_2 - y_1}_{\in Y}$$

$\Longrightarrow x_1 - x_2 = y_2 - y_1 \in X \cap Y$ che è $\{0\}$

$\Longrightarrow x_1 - x_2 = y_2 - y_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = x_1,\ y_2 = y_1.$ $\blacksquare$

Def: se $V = X \oplus Y$ chiamo proiezioni associate a questa decomposizione le funzioni $p, q : V \to V$ dove, se $v = x + y$, chiamo $x = p(v)$ e $y = q(v)$ (p proiez. su X, q proiez. su Y).

Es: $V = \mathbb{R}^3$



Oss: p e q sono lineari:

$v_1 = x_1 + y_1$ $\qquad$ $p(v_1) = x_1$, $q(v_1) = y_1$

$$v_2 = x_2 + y_2 \qquad p(v_2) = x_2 , \; q(v_2) = y_2$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underbrace{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)}_{\in X} + \underbrace{(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)}_{\in Y}$$

$$\Longrightarrow \; p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

$$= \lambda_1 p(v_1) + \lambda_2 p(v_2)$$

q ... analogo.

<u>Es</u>: $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 7x - 4y + 3z = 0 \right\}$

$W = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$

Chiamiamo p, q le proiezioni. Calcoliamo

$p\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $q\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Cioè calcoliamo

$u \in \overline{U}$, $w \in \overline{W}$ t.c. $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = u + w$.

(in tal caso u sarà $p\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e w sarà $q\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$).

Se $w \in W$, sarà $w = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; vogliamo

che $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2t \\ 2-5t \\ -3+t \end{pmatrix}$

appartenga a $\overline{U}$ cioè che

$$7(4-2t) - 4(2-5t) + 3(-3+t) = 0$$

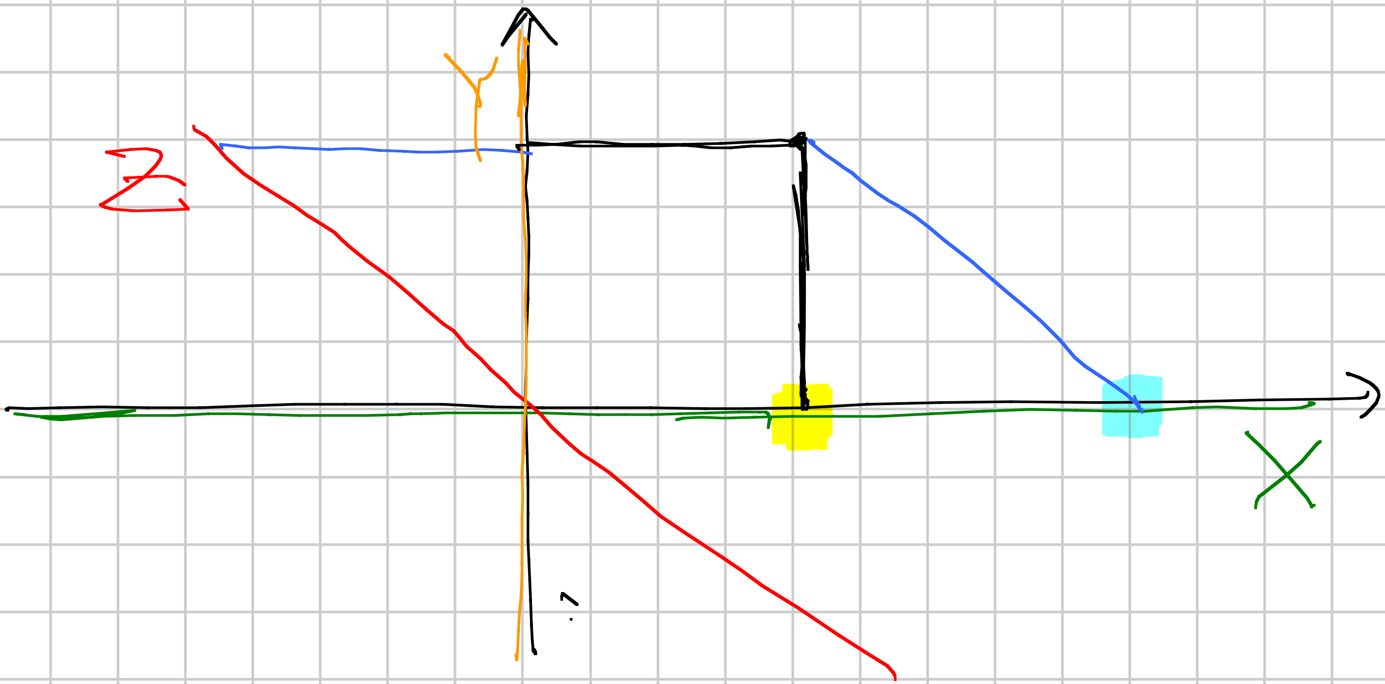
$$(28-8-9)+t(-14+20+3)=0$$

$$t=-{}^{11}/_{9}$$

drugie $\quad w=q\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}=-\frac{11}{9}\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\quad e$

$$u=p\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\-3\end{pmatrix}+\frac{11}{9}\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}=\ldots$$

Oss: la proiezione su X dipende anche da Y e non solo da X:



$$\mathbb{R}^2 = X \oplus Y = X \oplus Z$$

<u>Prop</u>: se $V = X \oplus Y$ con proiez. p, q si ha:

- $p \circ p = p$, $q \circ q = q$
- $p \circ q = q \circ p = 0$
- $p + q = id_V$
- $X = Im(p) = Ker(q)$, $Y = Im(q) = Ker(p)$.

<u>Dim</u>: $\cdot\ p \circ p = p$ $\qquad v \in V$, $v = \underset{\substack{\| \\ p(v) \\ \cap \\ X}}{x} + \underset{\substack{\cap \\ Y}}{y}$

$(p \circ p)(v) = p(p(v)) = p(x)$; per trovarlo

devo riuscire a scrivere x con $\underbrace{\qquad}_{\substack{\cap \\ X}} + \underbrace{\qquad}_{\substack{\cap \\ Y}}$

$$x = \underbrace{x}_{\in X} + \underbrace{0}_{\in Y}$$

$$\Longrightarrow \quad p(x) = x \quad \Longrightarrow (p \circ p)(v) = x = p(v).$$

- $q \circ p = 0$; $\quad v = \underbrace{x}_{= p(v)} + \underbrace{y}_{\in Y}$

Cercare $q(p(v)) = q(x)$ significa scrivere

$$x = \underbrace{x}_{\in X} + \underbrace{0}_{\in Y}$$

$$\Longrightarrow q(x) = 0 \Longrightarrow q(p(v)) = 0$$

• $p + q = id_V$; $v = \underset{\underset{p(v)}{\parallel}}{x} + \underset{\underset{q(v)}{\parallel}}{y}$

$\Rightarrow v = (p+q)(v)$ cioè $p+q = id_V$

- $\mathrm{Im}(p) = X$

$\subset$ ovvio ; viceversa se $x \in X$ ho

$$x = \underset{\overset{\|}{p(x)}}{x} + 0 \quad \Rightarrow x \in \mathrm{Im}(p)$$

$\mathrm{Ker}(q) = X$:

$\subset$: $\quad v \in \operatorname{Ker}(q) \implies v = \underset{\substack{\cap \\ X}}{p(v)} + \underset{\substack{\| \\ 0}}{q(v)}$

$$\implies v \in X$$

$\supset$: $\quad x \in X \implies x = \underset{\substack{\cap \\ X}}{x} + \underset{\substack{\cap \\ Y}}{0}$

$$\implies q(x) = 0 \, .$$

$\blacksquare$

Prop: dato $p: V \to V$ lineare con $p \circ p = p$ esistono $X, Y \subset V$ sttsp t.c. $V = X \oplus Y$ e p è la associata proiezione su X (l'altra sarà $id_V - p$).

Dim: Pongo $X = \mathrm{Im}(p)$, $Y = \mathrm{Ker}(p)$ e provo che $V = X \oplus Y$ con p proiez. su X.

$X \cap Y = \{0\}$: $v \in \operatorname{Im}(p) \cap \operatorname{Ker}(p)$

$\Rightarrow v = p(u)$, $p(v) = 0$; allora

$$v = p(u) = p(p(u)) = p(v) = 0$$ ✓

$X + Y = V$: dato $v \in V$ voglio scrivere

$v = x + y$ $x \in \operatorname{Im}(p)$, $y \in \operatorname{Ker}(p)$;

dico che va bene prendere $x = p(v)$, $y = v - p(v)$;

- $p(v) + (v - p(v)) = v$ ✓
- $p(v) \in \mathrm{Im}(p)$
- $p(v - p(v)) = p(v) - p(p(v)) = p(v) - p(v) = 0$

$$\Longrightarrow v - p(v) \in \mathrm{Ker}(p)\,.$$

$\boxtimes$

Esempio: $V = M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$S_n(\mathbb{R}) = \{A \in V : {}^tA = A\}$ dim $= \dfrac{n(n+1)}{2}$ +

$A_n(\mathbb{R}) = \{A \in V : {}^tA = -A\}$ dim $= \dfrac{n(n-1)}{2}$ =

n^2

Inoltre $A \in S_n \cap A_n$ ho

${}^tA = A = -A \Rightarrow A = 0$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{M}_{n \times n} = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n \, .$$

Proiezioni associate: $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$;

vogliamo scrivere

$$M = S + A \qquad {}^tS = S, \; {}^tA = -A$$

$${}^tM = S - A$$

$$\Longrightarrow S = \frac{1}{2}(M + {}^tM), \; A = \frac{1}{2}(M - {}^tM).$$

Es $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>Def</u>: chiamo $\mathcal{L}(V,W) = \{ f : V \to W \text{ lineare} \}$.

Ricordo: $\mathcal{F}(S,W)$ se W è sp. vett., è sp. vett. con operazioni:

$$0(x) = 0$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

Visto: $\mathcal{L}(V,W)$ è un sottosp. di $\underbrace{\mathcal{F}(V,W)}$.

vogliamo capire questo

Caso $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$. Visto:

se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f_A(x) = A \cdot x$

$$f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

(f_A applicazione lineare associata ad A).

Teo: l'applicazione

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \ni A \xrightarrow{\ \psi\ } f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

è lineare bijettiva.

Conseguenze: le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ sono tutte e sole quelle associate a matrici.

Inoltre la struttura di sp. vett. di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

è quello di $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tramite ψ. Dunque

“$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ è in modo canonico $M_{m\times n}(\mathbb{R})$”.

<u>Cor</u>: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)) = \dim_{\mathbb{R}}(M_{m\times n}(\mathbb{R})) = m\cdot n$.

<u>Dim</u>: $\psi : M_{m\times n} \ni A \longmapsto f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.

$\boxed{\Psi \text{ lineare}}$ $\quad \Psi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \overset{?}{=} \lambda_1 \Psi(A_1) + \lambda_2 \Psi(A_2)$

cioè $\quad f_{(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)} \overset{?}{=} \lambda_1 f_{A_1} + \lambda_2 f_{A_2}$

candidata uguaglianza tra funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; vero se

$$f_{(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)}(x) \overset{?}{=} (\lambda_1 f_{A_1} + \lambda_2 f_{A_2})(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$f_{(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)}(x) \overset{?}{=} \lambda_1 f_{A_1}(x) + \lambda_2 f_{A_2}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot x \overset{?}{=} \lambda_1 \cdot A_1 \cdot x + \lambda_2 \cdot A_2 \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Vero: prod. righe x col. è lineare a sinistra

$\boxed{\psi \text{ iniettiva}}$ Sia $A \in M_{m \times n}$, $A \in \mathrm{Ker}(\psi)$,

cioè $f_A = 0$, dunque $A \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^q$.

$$\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

matr. fissata

qualunque vettore metto qui

trovo 0 qui

Voglio concludere che $A = 0$. Altrimenti

$$
\begin{array}{cc}
i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{\neq 0} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{ccc} & j & \end{array}
\end{array}
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
= \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{ij} \neq 0 \\ \vdots \end{pmatrix}
$$

Più formalmente:

$$
A \cdot e_j^{(n)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}}_{j\text{-esima colonna di } A.}
$$

$\boxed{\Psi \text{ surgettiva}}$ Data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

cerco $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ t.c. $f = f_A$.

So che se tale A esiste si ha

$$A \cdot e_j^{(n)} = f_A(e_j^{(n)}) = f(e_j^{(n)})$$

è la j-esima colonna di A.

Dunque definisco A come la matrice che j-esima colonna $f(e_j^{(n)})$, ovvero

$$f(e_j^{(n)}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i^{(m)} .$$

Questa espressione definisce A in modo unico.

Devo provare che $f_A = f$, cioè

$$f_A(x) \overset{?}{=} f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{ccc} f_A(x) & \overset{?}{=} & f(x) \\ \| & & \| \\ A \cdot x & & f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j^{(n)}\right) \end{array}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j f\left(e_j^{(n)}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i^{(m)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}_{(A \cdot x)_i} \Big) e_i^{(m)}$$

$$= A \cdot x .$$

Si. $\blacksquare$

Per V, W qualsiasi di dimensione finita, posso scegliere una base $\mathcal{B}$ per V e $\mathcal{C}$ per W

e ho le applicazioni biiettive

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\phi_{\mathcal{C}}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\Theta(f)"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

$$\phi_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

$$\phi_{\mathcal{C}}(w) = [w]_{\mathcal{C}}$$

$$\Theta^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f) = \phi_{\mathcal{C}} \circ f \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

$\Theta_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} : \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

poiché $\phi_{\mathcal{B}}$ identifica V a $\mathbb{R}^n$ e $\phi_{\mathcal{C}}$ identifica W a $\mathbb{R}^m$, tale $\Theta_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ identifica $\mathcal{L}(V,W)$ con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, e dunque con $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Dunque: anche $\mathcal{L}(V, W)$ ha dimensione $n \cdot m$ ed è identificato a $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ma in modo non canonico, perché dipende dalle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

Riassumendo:

- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ è canonicamente $M_{m \times n}(\mathbb{R})$

- fissate $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ basi di V, W, essi diventano $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ ma non canonicamente
- fissate $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ basi di V, W

$\mathcal{L}(V, W)$ è <u>non</u> canonicamente $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.