Algebra Lineare 7/12/16

$\boxed{5.5.5}$ Stabilire per quale base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ si ha

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

- Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$. Applico ipotesi con $x = e_1$, $x = e_2$

$$[e_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = 3v_1 - 4v_2$$

$$[e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = -5v_1 + 7v_2$$

$$\Longrightarrow \quad v_1 = 7e_1 + 4e_2 \qquad\qquad v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = 5e_1 + 3e_2 \qquad\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- In generale ho $x = \mathcal{B} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$ che in $\mathbb{R}^2$ è una uguaglianza come

$$\underset{2\times 1}{x} = \underset{2\times 2}{\mathcal{B}} \cdot \underset{2\times 1}{[x]_{\mathcal{B}}}$$

Ipotesi $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$

ovvero $\quad [x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot x$

Dunque: $\quad x = \underbrace{\left(\mathcal{B} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \right)}_{\text{deve essere } I_2} \cdot x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2$

$$\Longrightarrow \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{5.5.6}$ Trovare la base $\mathcal{B}$ di $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}$ t.c.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$2+3-5$ ✓ $\qquad 12+3-15$ ✓

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v_1 - v_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5v_1 - 2v_2$$

$$v_1 = -2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2 = -5\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-3\\1\end{pmatrix}$$

$\boxed{5.5.7}$ Trovare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ t.c.

$$[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^{[3]}} = \begin{pmatrix} 4a_{11}+7a_{12} & 5a_{11}-6a_{12} \\ 4a_{21}+7a_{22} & 5a_{21}-6a_{22} \\ 4a_{31}+7a_{32} & 5a_{31}-6a_{32} \end{pmatrix} \quad \forall A \in \mathcal{M}_{3\times 2}$$

$$(f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$$

In generale: $f_A \cdot \mathcal{B} = \mathcal{E}^{[3]} \cdot [f_A]^{\mathcal{E}^{[3]}}_{\mathcal{B}}$

$f_A = A \in M_{3\times 2}$, $\quad \mathcal{B}$: 2×2, $\quad \mathcal{E}^{[3]} = I_3$: 3×3, $\quad [f_A]^{\mathcal{E}^{[3]}}_{\mathcal{B}}$: 3×2

Ipotesi: $[f_A]^{\mathcal{E}^{[3]}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$

Dunque voglio: $A \cdot \mathcal{B} = A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$.

$\boxed{5.5.8}$ Trovare la base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ t.c.

$$[f_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^{(3)}} = \begin{pmatrix} -2a_{11}+5a_{21} & -2a_{12}+5a_{22} & -2a_{13}+5a_{23} \\ 3a_{11}-7a_{21} & 3a_{12}-7a_{22} & 3a_{13}-7a_{23} \end{pmatrix} \quad \forall A \in M_{2\times 3}$$

$(f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)$

In generale: $$\underset{\substack{\| \\ A \\ 2\times 3}}{f_A} \cdot \underset{\substack{\| \\ I_3 \\ 3\times 3}}{\mathcal{E}^{[3]}} = \underset{2\times 2}{\mathcal{C}} \cdot \underset{2\times 3}{[f_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^{[3]}}}$$

Ipotesi: $$[f_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^{(3)}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot A$$

Dunque voglio: $$A = \left(\mathcal{C} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}\right) \cdot A \quad \forall A$$

dunque $C \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = I_2$

$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$

Quiz dal libro arancione -

$\boxed{34}$ 6 capitolo 34, quesito 6.

Per quali $z \in \mathbb{C}$ i vettori $\begin{pmatrix} 1-4i \\ z-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+i \\ 3-2i \end{pmatrix}$

sono lin. dip.?

Devo risolvere $\det\begin{pmatrix} 1-4i & 2+i \\ z-i & 3-2i \end{pmatrix} = 0$

$$3-12i\cancel{-2i}-8-z(2+i)\cancel{+2i}-1=0$$

$$z=\frac{-6-12i}{2+i}=-6\,\frac{1+2i}{2+i}=-6\cdot\frac{(1+2i)(2-i)}{5}$$

$$=-\frac{6}{5}\left(2+4i-i+2\right)=-\frac{6}{5}(4+3i)$$

$\boxed{36}$ (4) Per quali z $\det\begin{pmatrix} 0 & i & z \\ 1-i & 0 & 1+z \\ -2i & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$?

$$2(1+z) + 2(1-i) = 0$$

$$z = i - 2$$

$\boxed{38}$ (6) Trovare le radici di

$$z^3 - 2(1+i)z + 3iz + 1 - i$$

sapendo che $z = 1$ è una di esse.

$1 \quad -2 \quad -2i \quad +3i \quad +1-i$ ✓

Ruffini: è divisibile per $z-1$

(Oss: se $p(z)$ ha la radice $z=\frac{1}{2}$

concludo che $p(z)$ è divisibile per $z-\frac{1}{2}$ ovvero per $2z-1$:

conviene in tal caso $2z-1$.)

Divido:

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 - 2(1+i)z^2 + 3iz + 1 - i & z - 1 \\
\cline{2-2}
-z^3 + z^2 & z^2 - (1+2i)z + i - 1 \\
\cline{1-1}
\qquad -(1+2i)z^2 + 3iz + 1 - i & \\
\qquad +(1+2i)z^2 - (1+2i)z & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad (-1+i)z + 1 - i & \\
\qquad\qquad (+1-i)z + i - 1 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Quoziente $z^2 - (1+2i)z + i - 1$.

$$\Delta = (1+2i)^2 - 4(i-1)$$

$$= 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$

$$z_{2,3} = \frac{1+2i \pm 1}{2} \begin{cases} 1+i \\ i \end{cases}$$

$\boxed{40}$ (4) Sapendo che $\det(v_1\ v_2\ v_3) = -i$

calcolare $\det(v_1 + iv_2, v_1 - iv_3, 2iv_2 + v_3)$

I) det lin. in ciascuna colonna

$\Rightarrow$ facendo uscire le 3 comb. lin. trovo 8 addendi

molti dei quali nulli perché hanno 2 col uguali;

restano non nulli :

$$1 \cdot (-i) \cdot (2i) \cdot \underbrace{\det(v_1, v_3, v_2)}_{-\det(v_1\, v_2\, v_3) = i}$$

$$+\ i \cdot 1 \cdot 1 \qquad \underbrace{\det(v_2, v_1, v_3)}_{-\det(v_1\, v_2\, v_3) = i}$$

$$= (2+i) \cdot i = 2i - 1$$

II) $\det(v_1 + i v_2,\ v_1 - i v_3,\ 2i v_2 + v_3)$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-i) \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 2i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} = (-i)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= - \ (1 - 2i) = 2i - 1$$