Esercitazione 5/10/16

2.3.8. Principio di induzione completa

Sia $P(n)$ un predicato sui naturali.

Verificare che

- $P(0)$ è vero
- Supponendo $P(j)$ sia vero per ogni j tra 0 e n allora, $P(n+1)$ è vero

Dimostrare a partire da induzione "classica".

Esercizio 2.3.9 Dimostrare che ogni numero naturale è prodotto di numeri primi

$n \in \mathbb{N}$

a) n è primo.

b) n non sia primo $\Rightarrow n = m \cdot d$ con $m < n$, $d < n$, $m, d \neq 1$

$m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ $\quad p_i$ primi

$d = q_1 \cdot \ldots \cdot q_h$ $\quad q_j$ primi

$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_h$ $\rightarrow$ $\neq$ primo

2.3.10. Usando il fatto che ogni intero è prodotto di numeri primi, dimostrare che esistono infiniti numeri primi.

Supponiamo per assurdo che esistano solo un numero finito di numeri primi $p_1, p_2, \dots, p_n$

$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ n <u>non è primo</u>, poiché $n \neq p_i \ \forall i$

Dato primo p_i p_i <u>non divide</u> n

$n = p_1 \cdot (p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1 \rightarrow$ resto $\Rightarrow n$ non si scrive come prodotto di numeri primi $\rightarrow$ assurdo $\square$

Es. 2.3.11 Usando il principio di induzione completa, dimostrare il principio del minimo:

Se $X \subset \mathbb{N}$ non vuoto, allora X ammette un elemento minimo $m \in X$ t.c. $\forall x \in X \quad m \leq x$.

Es. 2.3.12: Usando il principio del minimo, dimostrare la regola di divisione euclidea per i numeri interi: $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$, $\exists!\, q, r \in \mathbb{Z}$ tali che

$n = m \cdot q + r$, con $0 \leq r < m$

dividendo

divisore

quoziente

resto

Esistenza: Definiamo $R = \mathbb{N} \cap \{ n - k \cdot m : k \in \mathbb{Z} \}$

$R \neq \emptyset$, $R \subset \mathbb{N}$

- Se $n \geq 0$, prendo $k = 0$, $n \in R$
- Se $n < 0$, prendo $k = n$ e ottengo

$$n - n \cdot m = \underset{\overset{\wedge}{0}}{n} \cdot \underset{\overset{\wedge\!\shortparallel}{0}}{(1 - m)} \geq 0$$

Applichiamo il principio del minimo: sia r il minimo di R.
$r = n - q \cdot m$. Mostriamo che $r < m$

Se fosse $r \geq m$, otterremmo

$r - m = n - q \cdot m - m = n - (q+1) \cdot m$

$\rightarrow$ segue che $r - m \in R$, ma $r - m < r$ assurdo

Quindi $r < m$ e vale $n = q \cdot m + r$

- Unicità: $n = q_1 \cdot m + r_1 \quad 0 \leq r_1 < m$

$$n = q_2 \cdot m + r_2 \quad 0 \leq r_2 < m$$

Sottraendo le due uguaglianze otteniamo

$r_1 - r_2 = (q_2 - q_1) \cdot m \quad |r_1 - r_2| = |q_2 - q_1| \cdot m$

Allora $|r_1 - r_2| < m$, e $|r_1 - r_2|$ è multiplo di m
$\Leftrightarrow r_1 = r_2$ e $q_1 = q_2$.

Es. 2.3.13 Usando il principio del minimo, dimostrare la regola di divisione euclidea per i polinomi:
dati $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, con $\deg(g(x)) > 0$, $\exists!\ p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$
tali che $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ con $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$ (oppure $r(x) = 0$)

Esistenza: $R = \{ f(x) - q(x) \cdot g(x) : q(x) \in \mathbb{R}[x] \}$.

- Mostrare che R è non vuoto.
- Scegliere $r(x) \in R$ di grado minimo e mostrare che $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$

Es. 2.3.14. Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ data da $f(n) = (n^2, 3n-2)$. Dire se f è surg. e/o iniettiva.

Posto $\Delta = \{ (n,n) \in \mathbb{N}^2 : n \in \mathbb{N} \}$ trovare $f^{-1}(\Delta)$

- f è iniettiva $(n_1, m) \neq (n_2, m)$

SI se $n \neq m$ $n^2 \neq m^2 \Rightarrow (n^2, 3n-2) \neq (m^2, 3m-2)$

- f è surgettiva? **NO** (prima coordinata deve essere un quadrato). $(7,1) \notin Im(f)$

- $f^{-1}(\Delta)$. Sia $m \in \mathbb{N}$: $f(m) = (n,n)$

$\Leftrightarrow \underset{n}{\underset{\shortparallel}{m^2}} = \underset{n}{\underset{\shortparallel}{3m-2}} \Leftrightarrow m$ è soluzione intera di

$x^2 - 3x + 2 = 0$ *

Le soluzione di sono 1 e 2 $f^{-1}(\Delta) = \{1, 2\}$