Algebra Lineare 5/10/16

<u>Prop</u>: se $W, Z \subset V$ sono sottosp. vett.

allora $W \cap Z$ lo è.

<u>Dim</u>: 1. $v_1, v_2 \in W \cap Z$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W \\ v_1, v_2 \in Z \Rightarrow v_1 + v_2 \in Z \end{cases} \Rightarrow v_1 + v_2 \in W \cap Z.$$

$\blacksquare$

Conseguenze: mettendo a sistema equazioni che definiscono sottospazi ottengo un sottospazio.

Oss: $W \subset V$ è sottospazio se e solo se

1. $0 \in W$

2+3. se $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ allora $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$.

Infatti 2 e $3 \Rightarrow 2+3$ (facile)

$2+3 \longrightarrow 2$ e 3

$w_1 + w_2 = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2$

$\lambda \cdot w = \lambda \cdot w + 0 \cdot 0$

<u>Es</u>: $X = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : p(-2) = 0 \}$

$p(-2)$ = valutazione di $p(t)$ in $t = -2$

$\mathcal{E}$ sottospazio:

$$p(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

$$p(-2) = a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + \dots$$

dunque l'equazione $a_0 - 2a_1 + 4a_2 \dots = 0$
è un'equazione polinomiale omogenea di I
grado nei coeff del polinomio: va bene

2+3 $\quad p(t) = \sum a_n t^n \in X$ cioè $\sum (-2)^n \cdot a_n = 0$

$$q(t) = \sum b_n t^n \in X \text{ cioè } \sum (-2)^n \cdot b_n = 0$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\lambda p(t) + \mu \cdot q(t) = \sum (\lambda a_n + \mu \cdot b_n) \cdot t^n$$

$$\Rightarrow \lambda \left(\sum (-2)^n a_n \right) + \mu \left(\sum (-2)^n b_n \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum (-2)^n (\lambda a_n + \mu b_n) = 0$$

<u>OK</u>

Def: definisco

$$\mathbb{R}[t] \longrightarrow \mathbb{R}[t]$$

$$p(t) \longmapsto p'(t)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$$

(<u>derivazione</u>)

Es: $X = \{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 17}[t] : p(5) = 0, \ p'(-1) = 0 \}$

Infinite equazioni:

- $a_n = 0 \quad \forall n \geq 18$
- $a_0 + 5a_1 + 25a_2 + \cdots + 5^{17} \cdot a_{17} = 0$
- $a_1 - 2a_2 + 3a_3 - \cdots + 17 \cdot a_{17} = 0$

$$(p'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \dots)$$

Tutte equazioni polinomiali di grado I omogenee

$\Longrightarrow X'$ è sottospazio –

<u>Def</u>:
$$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$$
$$A \longmapsto {}^tA \quad \text{(Trasposta)}$$

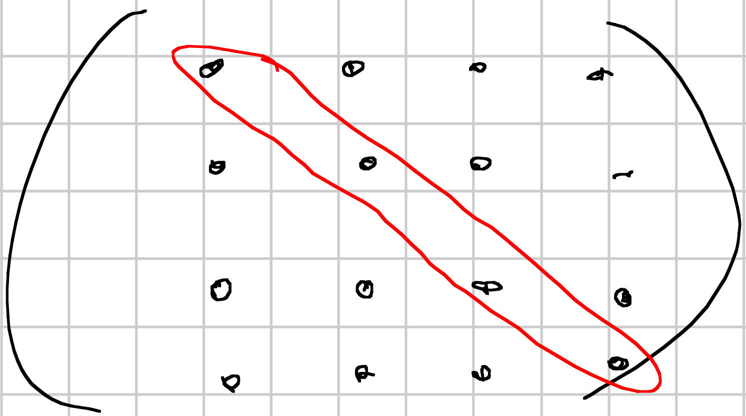
$$({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}$$

$\Longrightarrow$ ${}^tA$ si ottiene da A scambiando righe e colonne

$$ {}^t\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \pi \\ -7 & 4 & 51e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ \sqrt{3} & 4 \\ \pi & 51e \end{pmatrix} $$

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ la chiamo quadrata.

Chiamo diagonale principale quella che contiene i coeff $(A)_{ii}$ $i = 1 \dots n$



Per una A quadrata, trasporre = riflettere rispetto alla diag. princ.

$$ {}^t\begin{pmatrix} e & -8 & \sqrt{5} \\ \pi & 17 & 1 \\ 0 & 3\sqrt{2} & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \pi & 0 \\ -8 & 17 & 3\sqrt{2} \\ \sqrt{5} & 1 & -7 \end{pmatrix}. $$

<u>Def</u>: chiamo <u>traccia</u> di $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la somma dei coeff. su diag. princ.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}$$

Es : $\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -e \\ \pi & 7 & 51 \\ \sqrt{2} & 4 & -9 \end{pmatrix} = 3$

Es : $\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \mathrm{tr}(A) = 0 \}$

$$(A)_{11} + (A)_{22} + \dots + (A)_{nn} = 0$$

equaz. polinom. omog. di I grado $\Longrightarrow$ OK

Def: dico A simmetrica se ${}^tA = A$

$$S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : {}^tA = A\}$$

$$S_3(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} -\pi & 5 & 1 \\ 5 & e & -9 \\ 1 & -9 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Dico A antisimmetrica se ${}^tA = -A$

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : {}^tA = -A \}$$

$$\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} 0 & \pi & -7 \\ -\pi & 0 & \sqrt{3} \\ 7 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Oss</u>: $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ è definito dalle equazioni

$$(A)_{ji} = (A)_{ij} \qquad \forall i,j$$

$\Rightarrow$ è sottospazio.

n^2 equazioni? No: scambiando i, j trovo le stesse.

Bastano $(A)_{ji} = (A)_{ij}$ con $1 \leq i < j \leq n$

$\Rightarrow$ tante quante le coppie di elem. in $\{1, \dots, n\}$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$a_n(\mathbb{R})$ è def. dalle equaz.

$$(A)_{ji} = -(A)_{ij} \qquad \forall i,j$$

$\Longrightarrow$ è sottosp.

n^2 equaz? Bastano

$$(A)_{ii} = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$(A)_{ji} = -(A)_{ij} \qquad 1 \le i < j \le n$$

$$\Rightarrow n + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

<u>Es</u>: $V = \mathcal{F}(\{a,b,c\}, \mathbb{R})$

- $X = \{ f : 3f(a) - 5f(b) + 7f(c) = 0 \}$

Sottosp? 1. Sì

2+3. $f, g \in X$, cioè $f, g : \{a, b, c\} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\lambda \cdot (3 f(a) - 5 f(b) + 7 f(c) = 0)$$

$$+ \mu \cdot (3 g(a) - 5 g(b) + 7 g(c) = 0)$$

$$3 \underbrace{(\lambda f(a) + \mu g(a))}_{(\lambda f + \mu \cdot g)(a)} - 5 \underbrace{(\lambda f(b) + \mu g(b))}_{(\lambda f + \mu \cdot g)(b)} + 7 \underbrace{(\lambda f(c) + \mu g(c))}_{(\lambda f + \mu \cdot g)(c)} = 0$$

$\Longrightarrow$ $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ soddisfa l'equazione

$\Rightarrow$ Sì

L'equazione

$$3 f(a) - 5 f(b) + 7 f(c) = 0$$

è polinom. omog. di I grado in $f(a), f(b), f(c)$ che posso dunque considerare come "componenti" di f

- $\{ f : f(a)^7 + f(b) - \pi f(c) = 0 \}$

Non è sottosp:

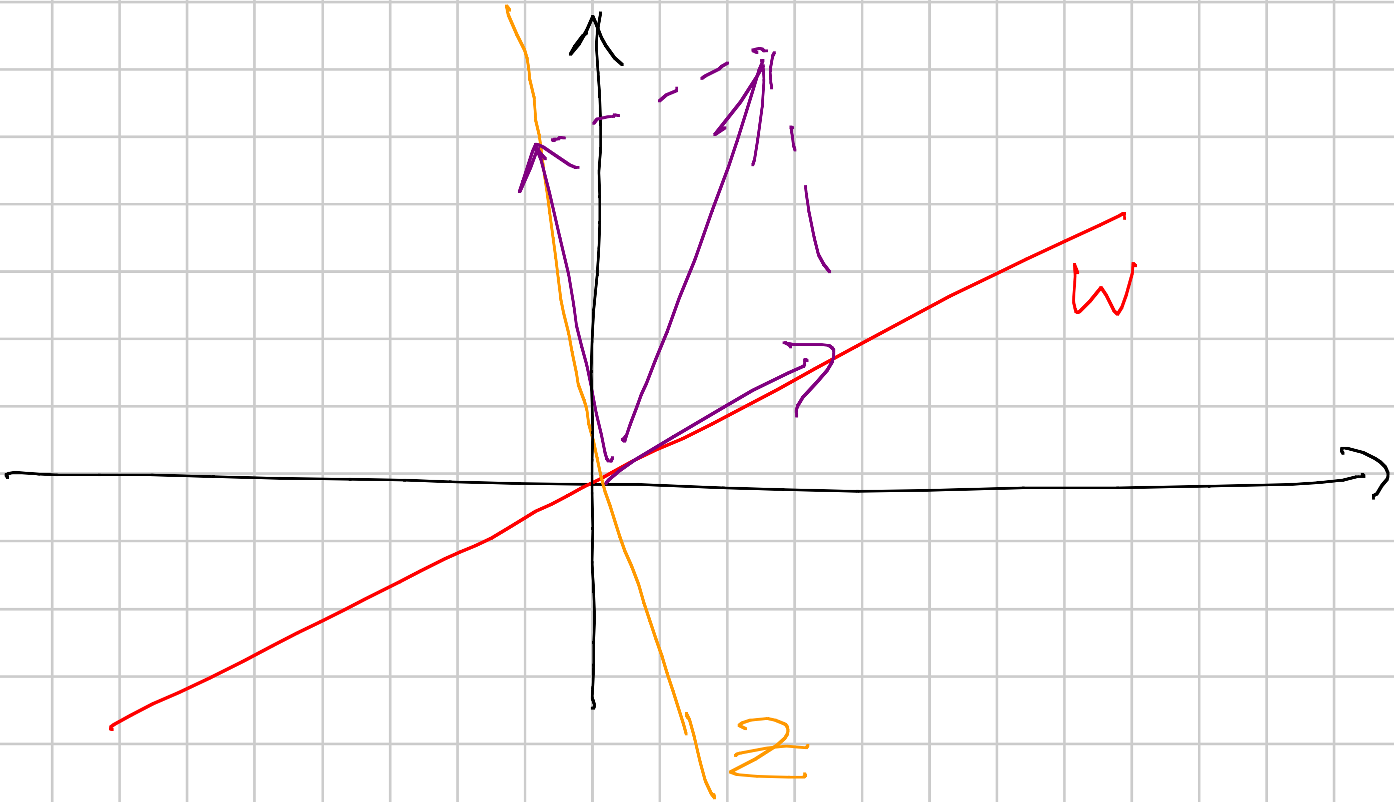
$$f : \begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 2 & (-1) \\ c \mapsto 3/\pi & (0) \end{cases} \qquad f \in X$$

$$2f : \begin{cases} a \mapsto 2 \\ b \mapsto 4 \\ c \mapsto 6/\pi \end{cases}$$

$$12 \cdot 8 + 4 - 6 \neq 0 \qquad 2f \notin X \qquad \underline{\text{No}}$$

Visto: W, Z sottosp. $\Longrightarrow$ $W \cap Z$ lo è

Unione?



Prop: $W \cup Z$ è sottospazio $\Longleftrightarrow$ $W \subset Z$ o $Z \subset W$

Dim: $\Leftarrow$: l'unione è il più grande dei due

$\Rightarrow$: Per assurdo, suppongo

$W \not\subset Z$ cioè $\exists\, w_0 \in W \setminus Z$

$Z \not\subset W$ cioè $\exists\, z_0 \in Z \setminus W$

Poiché $w_0, z_0 \in W \cup Z$ e sto supponendo che $W \cup Z$ sia sottospazio

ho $w_0 + z_0 \in W \cup Z$ dunque

$$w_0 + z_0 = w_1 \in W \Rightarrow z_0 = w_1 - w_0 \Rightarrow z_0 \in W$$

No

oppure

$$w_0 + z_0 = z_1 \in Z \Rightarrow w_0 = z_1 - z_0 \Rightarrow w_0 \in Z$$

No

$\boxtimes$

Prop: dato V sp. vett. e $S \subset V$ sottoinsieme esiste unico $W \subset V$ t.c.

1. W è sottospazio
2. $W \supset S$
3. Se Z è un altro sottosp. di V con $Z \supset S$ allora $Z \supset W$.

Cioè: W è il più piccolo sottospazio di V che contiene S.

Dim : basta scegliere W come l'intersezione di tutti i sottospazi di V che contengono S. $\blacksquare$

Def: dati $v_1, \dots, v_n \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ chiamiamo $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$ combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ con coeff. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

(Sia l'espressione sia il risultato.)

$(3+5=8)$

<u>Def</u>: Se $S \subset V$ chiamo sottospazio generato da S, indico con $\mathrm{Span}(S)$, il più piccolo sottosp. di V che contiene S.

Prop: $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n) =$ "l'insieme delle comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$"

$$= \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \}.$$

$$\left\{ (a_n)_{n=0}^{+\infty} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad \forall n \geq 0 \right\}$$

successioni "alla Fibonacci"

$(-3, 5, 2, 7, 9, 16, \dots)$

ogni equaz. $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ è

polinom. omog. di grado I nei valori di a

si tratta di un sottosp. vett. di $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

———— o ————

2.3.1. $n! > 2^n \quad \forall n \geq 4$

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \; \cdots \; 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot \; \cdots \; 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

> 1 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ > 1 $\qquad$ $\square$

2.3.2 $\qquad x \in \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow x+y \notin \mathbb{Q}$

per assurdo: $x+y \in \mathbb{Q} \Longrightarrow y = \underset{\underset{\mathbb{Q}}{\cap}}{(x+y)} - \underset{\underset{\mathbb{Q}}{\cap}}{x}$

$\Longrightarrow y \in \mathbb{Q}$: assurdo.

2.3.4 Un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

Per induzione:

P.B. $n=0 \Rightarrow S=\emptyset$; unico sottoinsieme: $\emptyset$, 1

$2^0=1$ ✓

($n=1 \Rightarrow S=\{*\}$; sottoinsiemi $\emptyset, \{*\}$, 2

$2^1=2$ ✓)

P.I. Supponiamo che ogni insieme con n el. abbia 2^n sottoinsiemi. Prendiamo S con $n+1$ elementi. Scegliamo $* \in S$; dunque $S' = S \setminus \{*\}$ ha n elementi.

Sottoinsiemi di S sono:

→ quelli che non contengono $*$ = un sottoinsieme di S'

→ quelli che contengono $*$ = un sottoinsieme di S' con l'aggiunta di $*$

ce ne sono sia del primo tipo sia del secondo tanti quanti i sottoinsiemi di S'

$\Rightarrow$ numero di sottoinsiemi di S = $2 \cdot$ numero di sottoinsiemi di S'

2^n per ipotesi induttiva

2^{n+1} tesi induttiva

Es: sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4\}$

non contengono 4

$\emptyset$

$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$

$\{1,2\}$ $\{1,3\}$ $\{2,3\}$

$\{1\ 2\ 3\}$

(2^3)

contengono 4

$\{4\}$

$\{1,4\}$ $\{2,4\}$ $\{3,4\}$

$\{1\ 2\ 4\}$ $\{1\ 3\ 4\}$ $\{2,3,4\}$

$\{1\ 2\ 3\ 4\}$

(2^3)

$2 \cdot 2^3 = 2^4$

2.3.5. $9^{m+1}+2^{6m+1}$ divisibile per 11 $\forall m \in \mathbb{N}$

induzione ; PB $m=0$ $9+2=11$ ✓

PI : supponiamo $9^{m+1}+2^{6m+1}=11\cdot k$;

$$9^{m+2}+2^{6m+7}=9^{m+1}\cdot 9+2^{6m+7}$$

$$=\left(11k-2^{6m+1}\right)\cdot 9+2^{6m+7}$$

$$=11\cdot(9k)+2^{6m+1}\left(2^{6}-9\right)$$

$$= 11\cdot(9k) + 2^{6n+1}\cdot 55 = 11(9k + 2^{6n+1}\cdot 5) \checkmark$$

<u>diretto</u> : $9 = 11 - 2$

$$\Rightarrow 9^{m+1} = (11-2)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} 11^k \cdot (-2)^{m+1-k}$$

$$= (-2)^{m+1} + 11\cdot m$$

$$2^{6m+1} = 2\cdot 2^{6m} = 2\cdot 64^m = 2\cdot(66-2)^m$$

$$= 2\cdot\left(11\cdot p + (-2)^{n}\right)$$

$$= 11\cdot q + 2\cdot(-2)^{n} = 11q - (-2)(-2)^{n}$$

$$= 11\cdot q - (-2)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 9^{n+1} + 2^{6n+1} = \cancel{(-2)^{n+1}} + 11n + 11\cdot q - \cancel{(-2)^{n+1}}$$

2.3.6 $$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

/

intero: numeratore

divisibile per 2

divisibile per 3

$n = 3k \longrightarrow$ ok

$n = 3k+2 \longrightarrow n+1 = 3(k+1)$ ok

$n = 3k+1 \longrightarrow 2n+1 = 3(2k+1)$ ok

induzione

PB $\quad n = 0 \qquad 0 = 0$ ✓

$$\left(n=1 \qquad 1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} \quad \checkmark \right)$$

PI sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+n+6n+6\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right)$$

$$= \frac{n+1}{6}\left(2n+3\right)\left(n+2\right)$$

$$= \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)}{6} \quad \checkmark$$

2.3.7

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)}_{1}^{n} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)}^{n} \right)$$

soluzione dell'equaz.

$x^2 = x + 1$

Oss: qualsiasi successione definita da

$$a_n = k \cdot \lambda^n + h \cdot \mu^n$$

soddisfa $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$; infatti

$$a_{n+2} = k \cdot \lambda^{n+2} + h \cdot \mu^{n+2}$$

$$= k \cdot \lambda^n \cdot \lambda^2 + h \cdot \mu^n \cdot \mu^2$$

$$= K\cdot\lambda^n\cdot(\lambda+1)+h\cdot\mu^n\cdot(\mu+1)$$

$$= \underbrace{K\lambda^{n+1}+h\cdot\mu^{n+1}}_{a_{n+1}}+\underbrace{K\cdot\lambda^n+h\cdot\mu^n}_{a_n}$$

Dunque $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\lambda^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\mu^n$

soddisfa $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, inoltre

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = 1$$

$\Rightarrow$ ho scoperto che (f_n) ha le stesse condizioni iniziali $f_0 = 0$ $f_1 = 1$ di (F_n) e soddisfa la stessa regola per proseguire $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$

$\Rightarrow f_n = F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$