Algebra Lineare 2/11/16

$f : V \longrightarrow W$ lineare se

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

$$Ker(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \} \subset V$$

$$Im(f) = \{ f(v) : v \in V \} \subset W$$

f surgettiva $\Longleftrightarrow$ $Im(f) = W$

f iniettiva $\Longleftrightarrow$ $Ker(f) = \{0\}$

Prop (formula delle dimensioni): se $f: V \to W$ è lineare e $\dim(V) < +\infty$ allora

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(V).$$

Dim: chiamiamo $k = \dim(\ker(f))$

$$n = \dim(V)$$

Tesi: $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n - k$.

Scelgo $v_1, \dots, v_k$ base di $\ker(f)$; la completo a base $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ di V.

Affermo che $\underbrace{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)}$ è base di $\mathrm{Im}(f)$.

$n-k$ vettori $\Longrightarrow$ ciò basta.

- generano: $w \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow w = f(v)$, $v \in V$;

scrivo $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n$

$$\Longrightarrow \quad w = f(v) = \cancel{\lambda_1 \underbrace{f(v_1)}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \dots + \lambda_k \underbrace{f(v_k)}_{\substack{\parallel \\ 0}}} + \lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$

OK

- lin. indip: siano $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lambda_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \lambda_n f(v_n) = 0 \;;$$

$$\Rightarrow f(\lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n \in \mathrm{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$$

$$\Rightarrow -\lambda_1 v_1 + \dots - \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

ma $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indip $\Rightarrow$

$$(-\lambda_1 = \dots = -\lambda_k =)\ \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0. \quad \blacksquare$$

Esempio: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 4z \\ 5x + y - 2z \\ -x - 7y + 10z \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 2x - 3y + 4z = 0 \ \checkmark \\ 5x + y - 2z = 0 \ \checkmark \\ -x - 7y + 10z = 0 \ \checkmark \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x = -7y + 10z \\ -17y + 24z = 0 \\ \cancel{-34y + 48z = 0} \end{array} \right\} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

Formula dimensione: $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$.

<u>Oss</u>: Se $v_1, \dots, v_n$ generano V allora $f(v_1), \dots, f(v_n)$ generano $\mathrm{Im}(f)$:

se $w = f(v)$, $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

$\Rightarrow w = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$.

Oss: posso anche usare $v_1, \dots, v_n$ base di V

e trovo sempre $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono generatori

di $\mathrm{Im}(f)$: se $\mathrm{Ker}(f) \neq 0$ non sono una base.

Per $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 4z \\ 5x + y - 2z \\ -x - 7y + 10z \end{pmatrix}$, $\mathrm{Im}(f)$ è generata da

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ottengo base di $\operatorname{Im}(f)$ estraendo da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lo tengo se il sistema

$$\begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 2 \quad ✓ \\ 5\alpha + \beta = -1 \quad ✓ \\ -\alpha - 7\beta = 5 \end{cases}$$

<u>non</u> ha soluz.

$$\begin{cases} \beta = -1 - 5\alpha \\ 17\alpha = -1 \\ \cancel{34\alpha = -2} \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha &= -1/17 \\ \beta &= -12/17 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ lo butto $\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = 2$

(come previsto).

— o —

Conseguenze:

(1) Se $\dim(V) > \dim(W)$ nessuna $f : V \to W$ può essere iniettiva

(ovvero: se $f : V \to W$ è iniettiva allora $\dim V \leq \dim W$): se f è iniettiva

$$\underbrace{\dim(\operatorname{Ker}(f))}_{=\,0} + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{\leq\, \dim(W)} = \dim V$$

$$\operatorname{Im}(f) \subseteq W$$

(2) Se $\dim(W) > \dim(V)$ nessuna $f : V \to W$ può essere surgettiva

(ovvero: se $f : V \to W$ è surgettiva allora $\dim(W) \leq \dim(V)$: se f è surgettiva

$$\underset{\geq 0}{\dim(\operatorname{Ker} f)} + \underbrace{\dim(\underset{\underset{W}{\parallel}}{\operatorname{Im} f})}_{\dim(W)} = \dim V$$

)

Attenzione: esistono funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bigettive per ogni n e m.

(Idea simile a: $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bigettiva).

(3) Se $\dim(V) = \dim(W) < +\infty$ (le chiamo n)

$f : V \to W$ lineare

iniettiva $\Longleftrightarrow$ surgettiva

Infatti: $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim \operatorname{Im}(f)) = \dim(V) = n$

Iniettiva: $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$

Suriettiva: $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n$.

Analogo a: se ho il numero giusto di vettori per essere una base, lin. indip. $\Leftrightarrow$ generano ✓

Infatti:

1/2 def base $\Rightarrow$ l'altra 1/2 se ho il numero giusto

So che esiste $f: V \to W$ lineare bigettiva $\Longleftrightarrow$ hanno la stessa dimensione.

Se hanno la stessa dim,

iniettiva $\Longleftrightarrow$ surgettiva.

$1/2$ def. di bigettiva $\Rightarrow$ altra $1/2$ se ho dim. finite.

Def: chiamo prodotto righe per colonne la

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times k}(\mathbb{R})$$

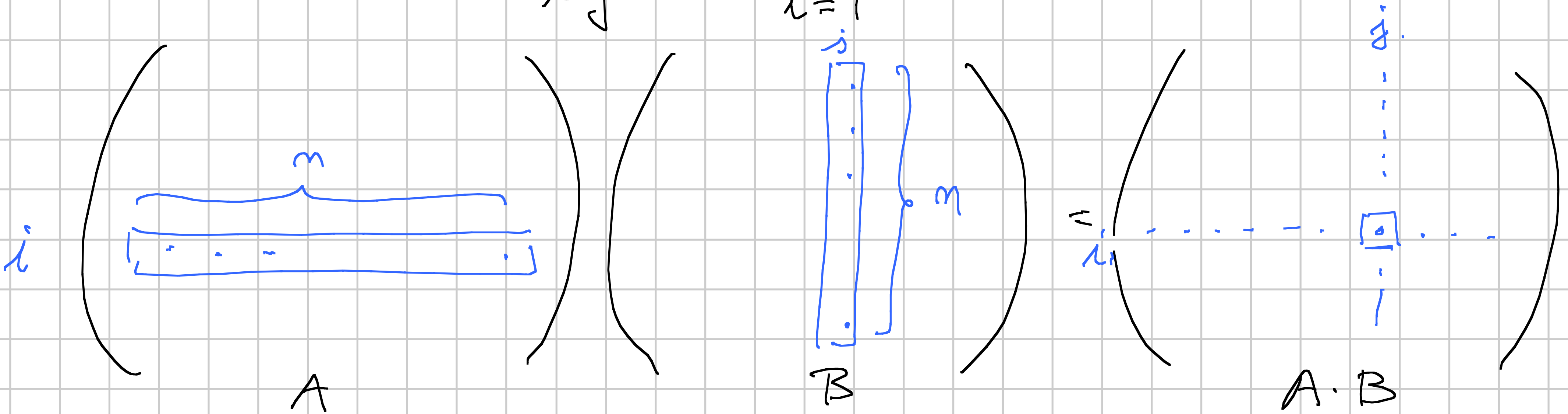
col I matrice
= # righe II matrice

col risultato
= # col. II matr

righe risultato
= # righe I matrice

$$(\underset{m\times n}{A},\ \underset{n\times k}{B}) \longmapsto \underbrace{A\cdot B}_{m\times k}$$

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot b_{lj}$$



su riga i, col j di $A \cdot B$ trovo somme di prodotti tra gli el. di riga i di A e col. j di B fatti ordinatamente.

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 7 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} = \text{NO}$$

2×2 3×2

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}$$

2×2 $\qquad$ 2×3 $\qquad$ 2×3

$$= \begin{pmatrix} 4+\pi & 5+2\pi & 7-9\pi \\ 25 & 29 & 76 \end{pmatrix}$$

Caso particolare: $k = 1$, $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$

$$A \cdot x \in \mathbb{R}^m \quad , \quad A \in \mathcal{M}_{m \times n}, \ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\underbrace{(m \times n) \cdot (n \times 1)}_{m \times 1}$$

Es.:

$$\underset{2 \times 4}{\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}} \underset{4 \times 1}{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}} = \underset{2 \times 1}{\begin{pmatrix} 8 - 21 + 2 - 3 \\ 4 + 7 + 5 + 6 \end{pmatrix}}$$

Prop: il prodotto righe per colonne è lineare in ciascun argomento fissato l'altro: cioè

- fissata $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ha

linearità a sinistra

$$M_{n\times k}(\mathbb{R}) \ni B \longmapsto A\cdot B \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$$

è lineare, ovvero

$$A\cdot(\lambda B+\mu C) = \lambda\cdot(A\cdot B)+\mu\cdot(B\cdot C)$$

- fissata $B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ la

linearità a destra

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}) \ni A \longmapsto A \cdot B \in M_{m \times k}(\mathbb{R})$$

è lineare, ovvero

$$(\lambda A + \mu C) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B) + \mu \cdot (C \cdot B)$$

<u>Oss</u>: A, B matrici, $A \cdot B \overset{?}{\neq} B \cdot A$

A $\quad$ B

$m \times n$ $\quad$ $k \times h$

$$A \cdot B$$

$$(m \times n) \cdot (k \times h)$$

posso se $k = n$

e viene $m \times h$

$$B \cdot A$$

$$(k \times h) \cdot (m \times n)$$

posso se $h = m$

e viene $k \times n$

Esistono entrambe se $k = n$ e $h = m$, e vengono

$m \times m$ e $n \times n$

ha senso chiedersi se sono uguali solo se $m = n$, cioè $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Però anche in tal caso non è sempre vero:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} .$$

Def: chiamo $I_n \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad (I_n)_{ij} = \delta_{ij}$$

Oss: $\underset{n \times n}{I_n} \cdot \underset{n \times k}{B} = B$ e $\underset{m \times n}{A} \cdot I_n = A$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

oppure!

$$(I_m \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{m} (I_m)_{il} \cdot (B)_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \delta_{il} \, (B)_{lj} = (B)_{ij} \qquad \checkmark$$

Conseguenze: $A \in M_{n \times n}$, $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$

Oss: $A \cdot A$ ...

Dimo (Prop):

- $$\underbrace{\underset{m \times n}{A} \cdot \underbrace{(\lambda \underset{n \times k}{B} + \mu \underset{n \times k}{C})}_{n \times k}}_{m \times k} \overset{?}{=} \underbrace{\lambda \cdot \underbrace{(A \cdot B)}_{\substack{(m \times n) \cdot (n \times k) \\ m \times k}} + \mu \cdot \underbrace{(A \cdot C)}_{\substack{(m \times n) \cdot (n \times k) \\ m \times k}}}_{m \times k}$$

Ora basta vedere che nel posto (i,j) hanno lo stesso coeff:

$$\left(A\cdot(\lambda B+\mu C)\right)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{il}\cdot(\lambda B+\mu C)_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} (A)_{il}\cdot\left(\lambda\cdot(B)_{lj}+\mu\cdot(C)_{lj}\right)$$

$$\left(\lambda\cdot(A\cdot B)+\mu\cdot(A\cdot C)\right)_{ij} = \lambda\cdot(A\cdot B)_{ij}+\mu\cdot(A\cdot C)_{ij}$$

$$= \lambda \cdot \sum_{l=1}^{n} (A)_{il} \cdot (B)_{lj} + \mu \cdot \sum_{l=1}^{n} (A)_{il} \cdot (C)_{lj}$$

OK.

A sinistra: analoga. $\boxed{\text{Fi}}$

Cor: fissata $A \in M_{m \times n}$ l'applicazione

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto A \cdot x$$

è lineare.

Es:
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y + 4z \\ 5x + y - 2z \\ -x - 7y + 10z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & -7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f = f_A \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & -7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Prop: se i prodotti hanno senso
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Dim:

$$(A\cdot B)\cdot C \overset{?}{=} A\cdot(B\cdot C)$$

$$\underbrace{\underbrace{(m\times n)\cdot(n\times k)}_{(m\times k)\cdot(k\times h)}}_{m\times h} \qquad \underbrace{m\times n \cdot \underbrace{(n\times k)\cdot(k\times h)}_{m\times h}}_{m\times h}$$

Basta vedere che hanno lo stesso coeff (i,j) $\forall i,j$:

$$((A\cdot B)\cdot C)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} (A\cdot B)_{il}\cdot (C)_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{p=1}^{m} (A)_{ip} \cdot (B)_{pl} \right) \cdot (C)_{lj}$$

$$(A \cdot (B \cdot C))_{ij} = \sum_{p=1}^{m} (A)_{ip} \cdot (B \cdot C)_{pj}$$

$$= \sum_{p=1}^{m} (A)_{ip} \cdot \left(\sum_{l=1}^{k} (B)_{pl} \cdot (C)_{lj} \right)$$

$\blacksquare$

Cor: $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times k}$

(dunque $A \cdot B \in M_{m\times k}$) ; ora:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathbb{R}^k \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_{(A\cdot B)}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}
$$

$$f_{(A\cdot B)} = f_A \circ f_B .$$

Infatti: $f_{(A \cdot B)}(x) = (A \cdot B) \cdot x = A \cdot (B \cdot x)$

$$= A(f_B(x)) = f_A(f_B(x))$$

$$= (f_A \circ f_B)(x). \qquad \boxtimes$$

Dunque: il prodotto tra matrici corrisponde alla composizione di applicazioni.