UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 16/2/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

2. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione 5 su $\mathbb{C}$ e $f : V \to V$ ha esattamente tre autovalori distinti, si può concludere che f è diagonalizzabile oppure che non lo è? Spiegare.

3. Posto $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 13 \end{pmatrix}$ dire se $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ sia un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$. Spiegare.

4. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ esista $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ unitaria tale che ${}^{\mathrm{t}}M \cdot \begin{pmatrix} i & 1+i \\ a & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \cdot M$ sia diagonale.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $2xy + 2xz - 5y^2 + 5z^2 - 2z = 0$.

6. Per quali $t \in \mathbb{R}$ l'iperbole $((t+1)x - ty + 5)^2 - ((t-1)x - 3(t+4)y - 3)^2 = 1$
ha il punto all'infinito $[2 : -1]$?

7. Calcolare $\int_\alpha ((y-z)\,\mathrm{d}x + 2z\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}z)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 \\ t^3 \\ 2 - 3t^2 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 16/2/16 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare $W = \mathrm{Span}(2e_1 + e_2,\ e_1 + 5e_2 + 3e_3)$.

(A) (4 punti) Esibire la matrice M della proiezione ortogonale su W, verificando che soddisfa le proprietà caratterizzanti.

(B) (4 punti) Verificare che $6 \cdot M$ ha coefficienti interi, definire A come la matrice ottenuta da M dividendo per 2 i suoi coefficienti pari e lasciando inalterati quelli dispari, e provare che A è diagonalizzabile.

(C) (4 punti) Provare che A ha esattamente un autovalore intero e trovare un relativo autovettore.

2. In $\mathbb{R}^3$ considerare la curva $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s^3 - 2s \\ 3s/(s+1) \\ 2/(1-s) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Trovare il più grande intervallo I contenente 0 su cui α è definita, e provare che su I la α è regolare e iniettiva.

(B) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $\alpha(0)$.

(C) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta \mathrm{e}^{-2xyz}(yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z)$ dove β è la restrizione di α a $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 16/2/16 — Quesiti

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $2,\ i;\ \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Non si può concludere nulla: dipende dalle molteplicità geometriche

3. No, $\det(A) < 0$

4. $a = -\sqrt{2}$

5. Paraboloide iperbolico

6. $t = -\frac{3}{2}$ e $t = -4$

7. $\frac{71}{20}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ è simmetrica e ha quadrato uguale a sé stessa

(B) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è simmetrica

(C) $\lambda = 6,\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.

(A) $I = (-1, 1)$; la seconda e la terza componente di $\alpha'(t)$ sono sempre positive

(B) $\kappa = \frac{28}{17\sqrt{17}},\ \tau = \frac{27}{49}$

(C) $t = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{7\sqrt{17}}\begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ 22 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{2}(1 - e^7)$