Esercizî di Matematica
Scienze Biologiche 15/16 – Corso A

(Carlo Petronio)

Foglio del 20/10/2015

Se A è una proposizione, eventualmente riguardante un soggetto indeterminato ed eventualmente composta da altre proposizioni legate da connettivi logici "e/o" la proposizione non(A) è la negazione di A, cioè quella che è vera quando A è falsa e falsa quando A è vera.

Esercizio 1 Esprimere le seguenti proposizioni come combinazioni di proposizioni elementari, usando i connettivi logici e i quantificatori "$\forall/\exists$", quindi scriverne la negazione ed esprimerla nel linguaggio naturale:

- Luca e Giovanna amano le mele;
- Luca ama le mele ma non le albicocche;
- A Genova tutti amano le mele ma non le albicocche;
- A Torino c'è qualcuno che ama le mele ma non le albicocche;
- A Napoli nessuno ama sia le mele, sia le albicocche sia le noci.
- A Roma tutti amano le albicocche o le noci

* * *

Se A e B sono proposizioni (tipicamente, affermazioni che riguardano uno o più soggetti indeterminati, che possono essere vere oppure false a seconda del soggetto specifico a cui si applicano), l'implicazione $(A \Rightarrow B)$ è la nuova proposizione che dice la cosa seguente: "ogni volta che A è vera, si ha che anche B è vera".

Esercizio 2 Convincersi che $(A \Rightarrow B)$ equivale a $(\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A))$, cioè che una delle due implicazioni vale se e solo se vale l'altra.

Esercizio 3 Tradurre le seguenti affermazioni in implicazioni $(A \Rightarrow B)$, scrivere le corrispondenti $(\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A))$ e tradurre queste ultime in linguaggio naturale:

- piove solo di notte;
- gli scacchi bianchi della mia scacchiera sono tutti danneggiati;
- le auto a trazione integrale fanno meno dei 230 km/h.

Esercizio 4 Sia X un insieme e siano $A(x)$ e $B(x)$ affermazioni riguardanti un generico $x \in X$, che possono essere vere o false al variare di x. Posto

$$\mathcal{A} = \{x \in X : \ A(x)\}, \qquad \mathcal{B} = \{x \in X : \ B(x)\}$$

verificare che l'implicazione $(A(x) \Rightarrow B(x))$ equivale all'inclusione $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$.

Esercizio 5 Tradurre le seguenti affermazioni sia come implicazioni del tipo $(A(x) \Rightarrow B(x))$ sia come inclusioni $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$:

- In quest'aula, gli studenti con una maglietta rossa hanno tutti l'orologio al polso;
- Nel derby milanese di domenica scorsa, hanno segnato solo giocatori con la maglia dispari;
- Tra i libri di testo di quest'anno, quelli lunghi più di 300 pagine hanno tutti la copertina verde.

Esercizio 6 Esprimere le seguenti proposizioni come implicazioni tra combinazioni di proposizioni elementari, usando i connettivi logici e i quantificatori "$\forall/\exists$", quindi scriverne la negazione ed esprimerla nel linguaggio naturale:

- Chi ama le mele non ama le albicocche;
- Chi ama le mele ma non le albicocche non ama nemmeno le noci;
- Chi ama le mele o le albicocche ama anche le noci;
- Chi ama le mele o non ama le albicocche o ama le noci.

*   *   *

Gli esercizî 7-11 sono quelli proposti alla fine della lezione di logica, di cui *non* riproduco qui i testi.

*   *   *

Esercizio 12 Per gli insiemi A e B dati dire se valga una delle relazioni $A \subset B$ oppure $B \subset A$ oppure $A = B$, quindi determinare $A \cup B$ e $A \cap B$ e $A \setminus B$ e $B \setminus A$:

- $A = \{0,\ 1,\ 4,\ 9\}$
  $B = \{n^2 :\ n \in \mathbb{Z},\ |n| < 4\}$
- $A = \{n \in \mathbb{N} :\ 1 < n < 15,\ n \text{ primo}\}$
  $B = \{n \in \mathbb{N} :\ 2 < n < 14,\ n \text{ dispari}\}$
- $A = \{n \in \mathbb{N} :\ n \text{ pari}\}$
  $B = \{4k + 2 :\ k \in \mathbb{N}\}$
- $A = \{n \in \mathbb{N} :\ n < 10,\ n \text{ dispari}\}$
  $B = \{n^2 :\ n \in \mathbb{N},\ n < 6\}$
- $A = \{n \in \mathbb{N} :\ n \text{ dispari}\}$
  $B = \{3k + 1 :\ k \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 13 Se A è un insieme, $\wp(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A, compreso $\emptyset$ e A stesso. Esibire $\wp(A_n)$ dove $A_n = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ n\}$ per alcuni valori piccoli di n, calcolando quanti elementi abbia. Si può ipotizzare una formula generale? Si può spiegare perché è vera?

Esercizio 14 Dati $A = \{1,\ 3,\ 7\}$ e $B = \{2,\ 3,\ 7,\ 8\}$ esibire $A \times B$ e $B \times A$, osservando che sono diversi.

Esercizio 15 Verificare che se A e B sono insiemi si ha $A \times B = B \times A$ solo se $A = B$.

Esercizio 16 Sapendo che tra gli insiemi $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ valgono le relazioni

$$A \subseteq B \cup C, \quad D \subseteq E \cup (C \setminus A), \quad E \cap F = \emptyset, \quad C \cap F \neq \emptyset$$

dire quale delle seguenti vale necessariamente:

$$D \cap F = \emptyset, \quad C \cap F \subset A, \quad D \cap F \setminus C = \emptyset, \quad D \cap F \setminus (A \cap C) = \emptyset, \quad A \cap F = \emptyset.$$

* * *

I prossimi esercizî 17-19 sono tratti dal test di ammissione; qui riassumo brevemente i testi.

Esercizio 17 Ricavare g sapendo che $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ e $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Esercizio 18 Se un lato di un rettangolo cala del 10% e l'altro del 20%, qual è il rapporto tra la nuova area e la vecchia?

Esercizio 19 Se "a Bra nessuno ha almeno due auto" è falsa si deduce che:

- A Bra qualcuno ha almeno due auto
- A Bra qualcuno ha esattamente due auto
- A Bra tutti hanno almeno due auto

- A Bra qualcuno ha esattamente un'auto
- A Bra tutti hanno almeno due auto.