Esercizî di Matematica
Scienze Biologiche 15/16 – Corso A

(Carlo Petronio)

Foglio del 16/3/2016

Principali regole di derivazione (si suppone che tutte le funzioni di cui si parla siano definite e derivabili nei punti considerati)

- (derivata della somma)
  se $h(x) = f(x) + g(x)$ allora $h'(x) = f'(x) + g'(x)$
- (derivata del prodotto)
  se $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ allora $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- (derivata del reciproco)
  se $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ allora $h'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$
- (derivata della composizione)
  se $h(x) = g(f(x))$ allora $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$
- (derivata dell'inversa)
  se $h(x) = f^{-1}(x)$ allora $h'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
- (derivata di una potenza)
  se $f(x) = x^\alpha$ allora $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
  (vale per $x > 0$ se $\alpha \in \mathbb{R}$, per $x \neq 0$ se $\alpha \in \mathbb{Z}$, per ogni x se $\alpha \in \mathbb{N}$)
- (derivata del seno)
  se $h(x) = \operatorname{sen}(x)$ allora $h'(x) = \cos(x)$
- (derivata del coseno)
  se $h(x) = \cos(x)$ allora $h'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

- (derivata dell'esponenziale naturale)
  se $h(x) = \mathrm{e}^x$ allora $h'(x) = \mathrm{e}^x$
- (derivata del logaritmo naturale)
  se $h(x) = \ln(x)$ allora $h'(x) = \frac{1}{x}$

Esercizio 1 Dedurre dalle regole elencate le seguenti ulteriori regole

- (derivata della costante)
  se $h(x) = c$ allora $h'(x) = 0$
- (derivata del multiplo di una funzione)
  se $h(x) = c \cdot f(x)$ allora $h'(x) = c \cdot f'(x)$
- (derivata di un polinomio)
  se $h(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ldots + a_k \cdot x^k$ allora
  $h'(x) = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + \ldots + ka_k \cdot x^{k-1}$
- (derivata del rapporto)
  se $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ allora $h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
- (derivata della tangente)
  se $h(x) = \tan(x)$ allora $h'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2}$
- (derivata dell'esponenziale)
  se $a > 0$ e $h(x) = a^x$ allora $h'(x) = \ln(a) \cdot a^x$
- (derivata del logaritmo)
  se $a > 0$ e $h(x) = \log_a(x)$ allora $h'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$
- (derivata dell'arcoseno)
  se $h(x) = \mathrm{asen}(x)$ allora $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (derivata dell'arcocoseno)
  se $h(x) = \mathrm{acos}(x)$ allora $h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (derivata dell'arcotangente)
  se $h(x) = \mathrm{atan}(x)$ allora $h'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Esercizio 2 Determinare la retta tangente al grafico della funzione f nel suo punto di ascissa x_0

(a) $f(x) = x + \ln(x) \qquad x_0 = 5$

(b) $f(x) = \mathrm{e}^2 + 5\,\mathrm{sen}(x) - 3x \qquad x_0 = 0$

(c) $f(x) = \cos(x) + \log_\pi(x) \qquad x_0 = \pi$

(d) $f(x) = \frac{5x+\mathrm{sen}(2x)}{3x-\cos(4x)} \qquad x_0 = 0$

Esercizio 3 Determinare i punti del grafico di f con retta tangente ℓ

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 1 \qquad \ell:\ y = 6x - 5$

(b) $f(x) = x^3 + 2x \qquad \ell:\ y = 5x + 2$

(c) $f(x) = x^4 - 2x^2 \qquad \ell:\ y = -1$

(d) $f(x) = \mathrm{sen}(x) \qquad \ell:\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$

Esercizio 4 Determinare il punto di intersezione tra le tangenti al grafico di f nei suoi punti di ascisse x_1 e x_2

(a) $f(x) = x^3 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 1$

(b) $f(x) = -3x^2 + 5x + 1 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = -1$

(c) $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(x) - x \qquad x_1 = \frac{\pi}{2} \qquad x_2 = \pi$

(d) $f(x) = \ln(x) - 2 \qquad x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$

Esercizio 5 Calcolare la derivata della funzione f

(a) $f(x) = x^2 + \cos(x)^3$

(b) $f(x) = x \cdot \ln(x^2 - 3)$

(c) $f(x) = (\mathrm{e}^2 + \mathrm{sen}(x))^2$

(d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^3 + 5x^2 - 1)$

(e) $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x - \mathrm{atan}(\mathrm{e}^x)$

(f) $f(x) = \mathrm{acos}(\log_3(7x - 1))$

Esercizio 6 Dire in quali punti esiste la derivata della funzione f e calcolarla

(a) $f(x) = |2x - 5|$

(b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

(c) $f(x) = x \cdot |x - 1|$

(d) $f(x) = \cos(|x|)$

(e) $f(x) = x \cdot |x|$

(f) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(|x|)$

Esercizio 7 Determinare i punti per i quali la derivata della funzione f soddisfa la condizione indicata

(a) $f(x) = \mathrm{sen}(\mathrm{e}^x)$ nulla

(b) $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 6)$ nulla

(c) $f(x) = (2 + x^2) \cdot \mathrm{e}^x$ positiva

(d) $f(x) = (x^2 - 3) \cdot \mathrm{e}^x$ positiva

(e) $f(x) = x^3 \cdot (1 + \ln(x))$ positiva

(f) $f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x \cdot (x^2-1)}$ negativa

(g) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} \cdot (-2x^3 + 3x^2 - 3x + 1)$ negativa