Facoltà di Ingegneria
Università di Pisa

M. Barsanti, S. Francaviglia, M. Franciosi, T. Franzoni, M. Gobbino

Precorso di Matematica

Indice

Capitolo 1

Logica ed insiemi

Insieme

Un insieme è una qualunque collezione o aggregato di enti o oggetti di varia natura, che si dicono i suoi elementi. Due insiemi coincidono quando hanno esattamente gli stessi elementi.

Un insieme $\mathcal{A}$ è ben definito quando è possibile stabilire se un qualunque oggetto x è elemento di $\mathcal{A}$ (e si scrive allora $x \in \mathcal{A}$) o non è elemento di $\mathcal{A}$ (e si scrive allora $x \notin \mathcal{A}$).

Si hanno dunque due differenti modi di definire un insieme: o elencarne tutti gli elementi, o indicare una o più proprietà che gli elementi dell'insieme, e solo essi, verificano.

Nel primo caso si scrive $\mathcal{A} = \{x,\ y,\ z, \ldots\}$, nel secondo $\mathcal{A} = \{x : p(x),\ q(x), \ldots\}$, che si legge "insieme degli x tali che valgono le proprietà $p(x),\ q(x), \ldots$" ove $p(x),\ q(x), \ldots$ sono appunto le proprietà che specificano gli elementi dell'insieme in questione.

Sottoinsieme di un insieme

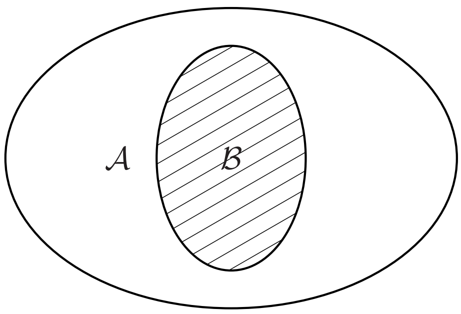

Figura 1.1: Sottoinsieme di un insieme.

Si dice che un insieme $\mathcal{B}$ è sottoinsieme di un insieme $\mathcal{A}$ (e si scrive $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, cioè $\mathcal{B}$ incluso in $\mathcal{A}$, oppure $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$, cioè $\mathcal{A}$ contenente $\mathcal{B}$) se ogni elemento di $\mathcal{B}$ è anche elemento di $\mathcal{A}$. Ciò accade per esempio se agli elementi di $\mathcal{B}$ si richiede di appartenere ad $\mathcal{A}$ ed inoltre di godere di altre proprietà $p(x),\ q(x), \ldots$:
$\mathcal{B} = \{x \in \mathcal{A} :\ p(x),\ q(x), \ldots\}$. Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ i due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno gli stessi elementi e dunque coincidono: $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Se invece $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ ma $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$ si dice anche che $\mathcal{B}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{A}$ e scriveremo $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

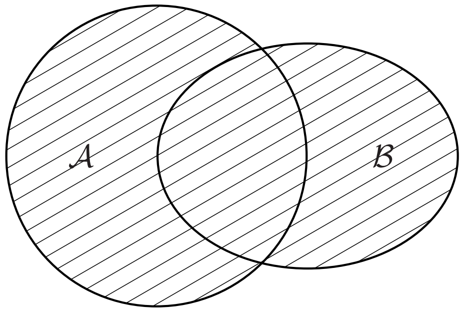

Figura 1.2: Unione fra due insiemi.

Unione fra due insiemi Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due insiemi: l'insieme che contiene tutti gli elementi di $\mathcal{A}$ e tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ (e solo essi) si chiama l'unione di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$ e si indica con $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Ovviamente $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A} = \{x : p(x)\}$ e $\mathcal{B} = \{x : q(x)\}$ si ha evidentemente

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x : p(x) \text{ oppure } q(x)\}$$

ove la parola oppure ha il significato del "vel" latino (x verifica almeno una delle due proprietà $p(x)$ e $q(x)$).

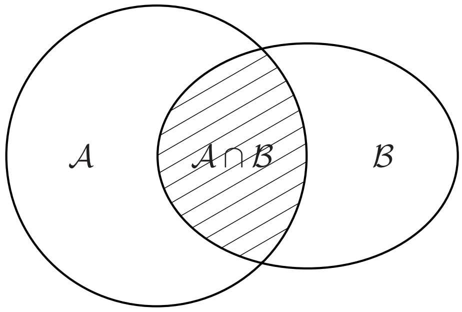

Figura 1.3: Intersezione fra due insiemi.

Intersezione fra due insiemi Ancora, se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due insiemi, l'insieme che contiene tutti e soli gli elementi che appartengono sia ad $\mathcal{A}$ che a $\mathcal{B}$ si chiama l'intersezione di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e si indica con $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Si ha nuovamente $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A} = \{x : p(x)\}$ e $\mathcal{B} = \{x : q(x)\}$ si ha evidentemente

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x : p(x),\ q(x)\}$$

dove x verifica la proprietà $p(x)$ "e" la proprietà $q(x)$.

Esempio 1.1 Per esempio, se $\mathcal{A} = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $\mathcal{B} = \{1,\ 3,\ 5\}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$ contiene gli elementi di $\mathcal{A}$ "o" di $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{1,\ 3\}$ contiene gli elementi di $\mathcal{A}$ "e" di $\mathcal{B}$.

Insieme vuoto Due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ possono anche non avere alcun elemento in comune; in tal caso l'insieme $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ è l'insieme privo di elementi, che si dice l'insieme vuoto e si indica con $\emptyset$. Per quanto detto in precedenza l'insieme vuoto è unico.

Esercizio 1.1 Verificare che:
$\mathcal{A} \cup \emptyset = \mathcal{A}$; $\mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset$; $\mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A}$; $\mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}$.
$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$; $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$.
$\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$; $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ se, e solo se, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B}$.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ se, e solo se, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}$.

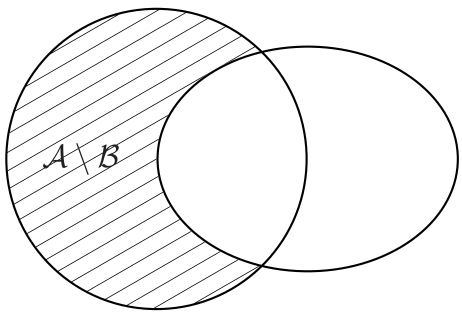

Figura 1.4: Differenza fra due insiemi.

Differenza fra due insiemi Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due insiemi: l'insieme degli elementi che appartengono ad $\mathcal{A}$ ma non appartengono a $\mathcal{B}$ si dice la differenza di $\mathcal{A}$ con $\mathcal{B}$ e si indica con $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$.

Si osservi che non è richiesto dalla definizione che l'insieme $\mathcal{B}$ sia contenuto nell'insieme $\mathcal{A}$.

Esempio 1.2 Per esempio, se $\mathcal{A} = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $\mathcal{B} = \{1,\ 3,\ 5\}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{2\}$ contiene gli elementi di $\mathcal{A}$ che non appartengono a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} = \{5\}$ contiene gli elementi di $\mathcal{B}$ che non appartengono ad $\mathcal{A}$.

Vale la pena ricordare che vi è una sostanziale differenza, non solo formale, che sussiste tra un insieme costituito da un solo elemento e l'elemento stesso. Ad esempio tra l'elemento 5 (con il quale si possono fare calcoli e altre operazioni) e l'insieme $\{5\}$ che appartiene ad un'altra categoria.

Esercizio 1.2 Sia $\mathcal{A}$ l'insieme delle donne e $\mathcal{B}$ l'insieme degli uomini coniugati. Dire a parole quali sono gli elementi dei seguenti insiemi: $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$.

Esercizio 1.3 Si provi: $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \setminus \mathcal{C})$, $\quad \mathcal{A} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \setminus \mathcal{C})$.

Logica e linguaggio comune

Si può pensare che scrivere la negazione di una proposizione sia sempre una operazione facile. Così la negazione della proposizione "Nessun uomo è immortale" è evidentemente data da "Almeno un uomo è immortale". Ad esempio, per negare la proposizione "Nessun numero intero positivo è primo" è sufficiente rilevare che il numero 7 è intero positivo e primo (controesempio). Non sempre però tale operazione è altrettanto semplice.

Esempio 1.3 Consideriamo per esempio la seguente frase:
(a) –"Ogni volta che ho preso l'ombrello non è piovuto".
Quale delle seguenti
(b) – "Quando esco coll'ombrello non piove"
(c) – "Tutti i giorni in cui esco senza ombrello piove"
(d) – "Almeno una volta sono uscito coll'ombrello ed è piovuto"
(e) – "Tutti i giorni in cui non piove esco coll'ombrello"
(f) – "Tutti i giorni in cui piove esco coll'ombrello"
(g) – "Una volta sono uscito coll'ombrello ed è piovuto"
(h) – "Talvolta sono uscito coll'ombrello ed è piovuto"
è la negazione di (a)?
Risposta. La negazione di (a) è (d). Infatti negare (a) significa dire "Non ogni volta che ho preso l'ombrello non è piovuto" ovvero "C'è stata almeno una volta in cui ho preso l'ombrello ed in cui è piovuto" che è ovviamente equivalente alla (d). La frase (g) non è la negazione di (a). Infatti la sua interpretazione è perlomeno dubbia: il suo significato corrente è infatti che c'è stata una ed una sola volta in

cui sono uscito coll'ombrello e non è piovuto, mentre (d) non esclude che ciò possa essere accaduto due o più volte, o addirittura tutte le volte in cui sono uscito.
Neppure (h) è la negazione di (a). Infatti una sua interpretazione corrente è "Più di una volta sono uscito coll'ombrello ed è piovuto", escludendo che ciò possa essere accaduto una volta sola.

Doppia negazione Spesso in italiano (contrariamente a quanto accade in altre lingue, per esempio in latino) una doppia negazione è da intendersi come una singola negazione.
Ad esempio, la frase "Non esiste nessun uomo che sia completamente cattivo" va generalmente intesa nel senso che "Ogni uomo non è completamente cattivo".
La frase precedente può allora essere resa meglio nel modo seguente: "Non esiste alcun uomo che sia completamente cattivo".

Simboli logici In matematica è bene abituarsi ad una maggiore precisione di linguaggio, per evitare ambiguità. A questo scopo vengono utilizzati alcuni simboli:

- $\forall$ è un simbolo logico che sostituisce l'espressione *per ogni*,
- $\exists$ è un altro simbolo logico che sostituisce l'espressione *esiste*, nel senso di esiste almeno un elemento,
- $\Rightarrow$ rappresenta l'implicazione logica "*se... allora*" tra due proposizioni,
- $\Longleftrightarrow$ rappresenta l'equivalenza logica fra due proposizioni.

Vale la pena osservare che, da un punto di vista formale, la proposizione $p \Rightarrow q$ equivale alla proposizione non $q \Rightarrow$ non p.
Invece, sapere che "non vale la proprietà p", di per sé, non fornisce alcuna implicazione sulla proprietà q; è facile trovare esempi in cui non vale p ma vale q, oppure non vale q, oppure ancora non sappiamo se q valga o meno.

Negare "$\forall \ldots \exists \ldots$" è equivalente ad affermare "$\exists$ almeno un $\ldots$ tale che $\forall \ldots$"

Prodotto cartesiano fra due insiemi Dati due insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si chiama prodotto cartesiano di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e si indica con $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ l'insieme i cui elementi sono tutte e sole le coppie ordinate $(a,\ b)$ ove $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$.

Esempio 1.4 Il prodotto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ degli insiemi $\mathcal{A} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $\mathcal{B} = \{5,\ 6,\ 7\}$ ha come elementi le 12 coppie ordinate $(1,\ 5)$, $(1,\ 6)$, $(1,\ 7)$, $(2,\ 5)$, $(2,\ 6)$, $(2,\ 7)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(3,\ 7)$, $(4,\ 5)$, $(4,\ 6)$, $(4,\ 7)$ rappresentate nella figura 1.5 a fianco.

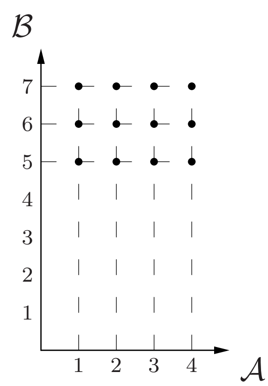

Figura 1.5: Prodotto cartesiano.

Numeri naturali

Indichiamo con $\mathbb{N}$ l'insieme $\{0, 1, 2, \ldots\}$ dei numeri naturali. Supporremo note le proprietà fondamentali e elementari di $\mathbb{N}$. Ricordiamo soltanto che fra gli elementi di $\mathbb{N}$ è definita una relazione d'ordine (quella di $\leq$) per cui si può scrivere

$$m \leq n \iff \exists p \in \mathbb{N} \text{ tale che } m + p = n \ .$$

Numeri interi relativi

Un primo ampliamento dell'insieme dei numeri porta da $\mathbb{N}$ all'insieme dei numeri interi relativi, indicato con $\mathbb{Z}$; tale ampliamento consente di trovare soluzione ad equazioni che altrimenti non le avrebbero. Ad esempio l'equazione $x + 8 = 5$ non ammette soluzione nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, ma è possibile trovarne la soluzione $x = 5 - 8 = -3$ nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi.

Numeri razionali

Consideriamo ora l'equazione $6x = 15$. Essa non ammette soluzione in $\mathbb{Z}$ (e quindi neppure in $\mathbb{N}$). È quindi utile ampliare l'insieme in cui si cercano soluzioni alle equazioni, introducendo l'insieme dei numeri razionali, indicato con $\mathbb{Q}$. L'equazione $6x = 15$ ha soluzione nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali: $x = 15/6 = 5/2$. Ricordiamo che ogni numero razionale non nullo può essere rappresentato univocamente nella forma $\varepsilon\frac{p}{q}$, ove ε è un segno ($+$ o $-$), e p e q sono numeri naturali primi tra loro (ovvero privi di divisori comuni), escludendo che q possa assumere il valore 0. Si osservi che per $q = 1$ si ottengono di nuovo gli interi relativi.

Numeri reali

Un ulteriore approfondimento del concetto di numero porta all'introduzione dei numeri reali, il cui insieme è indicato con $\mathbb{R}$. L'equazione $x^2 = 5$ non ammette soluzione in $\mathbb{Q}$ ma ha soluzione nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali: $x = \pm\sqrt{5}$ (ricorderemo più avanti il significato del simbolo $\sqrt{\ }$). Anche π è un numero reale (ma non razionale) e nella esperienza di ciascuno studente vi sono senz'altro molti altri esempi di numeri reali.

Le proprietà fondamentali dei numeri reali, quali ad esempio la completezza, verrano affrontate nel corso degli studi universitari.

Approssimazione decimale

Come tutti ben sanno, nella pratica vengono spesso utilizzate le approssimazioni decimali finite, utili per riuscire a determinare con un'adeguata precisione qualsiasi numero reale. Ad esempio, volendo rappresentare $\sqrt{2}$, possiamo scrivere, in prima battuta $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$, oppure, con precisione maggiore, $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$; $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143\ldots$

Legge di annullamento del prodotto

Una proprietà importante è la cosiddetta legge di annullamento del prodotto, di fondamentale importanza per risolvere equazioni del tipo $f(x) = 0$:

$$ab = 0 \iff a = 0 \text{ oppure } b = 0$$

(in particolare $a^2 = 0 \iff a = 0$).

Esercizio 1.4 Individuare gli elementi degli insiemi

a) $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \cdot (x-1) > 0\}$

b) $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : x \cdot (x-1) \leq 0\}$

c) $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \geq 0\}$

Ricordiamo le relazioni che sussistono tra gli insiemi numerici richiamati in questo capitolo:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Come nostra notazione, se $\mathcal{A}$ è un insieme numerico, indicheremo con $\mathcal{A}_*$ l'insieme degli elementi non nulli di $\mathcal{A}$, con $\mathcal{A}^+$ l'insieme degli elementi non negativi di $\mathcal{A}$, e con $\mathcal{A}^-$ l'insieme degli elementi non positivi di $\mathcal{A}$.

Così ad esempio si ha

$$\mathbb{N}_* = \{1,\ 2,\ \ldots\}\ ,$$

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}\ ,$$

$$\mathbb{Q}_*^- = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}\ .$$

Esercizio 1.5 Per ciascuna coppia di insiemi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ stabilire se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ oppure $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$; scrivere $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \backslash \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \backslash \mathcal{A}$ eventualmente trovando una proprietà equivalente.

a) $\mathcal{A} = \{a : a < 0 \text{ e } a \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $\mathcal{B} = \{b : b \neq 0 \text{ e } b \in \mathbb{R}\}$

b) $\mathcal{A} = \{a : a = 3k \text{ con } k \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $\mathcal{B} = \{b : b = 7h \text{ con } h \in \mathbb{N}\}$

c) $\mathcal{A} = \{a : a = 3k \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$ $\quad$ $\mathcal{B} = \{b : b = 6h \text{ con } h \in \mathbb{Z}\}$

d) $\mathcal{A} = \{a : a \text{ numero primo e } a < 418 \text{ e } a > 3\}$

$\mathcal{B} = \{b : b \text{ numero primo e } b < \sqrt{171396} \text{ e } b^2 \geq 25\}$

Intervalli Siano a e b due numeri reali, e sia $a < b$. Con la notazione $[a,\ b]$ indichiamo l'intervallo chiuso di estremi $a,\ b$, cioè l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

Con $(a,\ b)$ indichiamo invece l'intervallo aperto di estremi $a,\ b$, cioè l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Il simbolo $(a,\ b)$ può dunque indicare sia la coppia ordinata dei numeri reali a e b che l'intervallo aperto di estremi a e b: spetterà a noi distinguere fra i due significati a seconda del contesto in cui il simbolo risulterà inserito.

Si pone poi

$$[a,\ b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}\ ; \quad (a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}\ ;$$

$$(-\infty,\ a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}\ ; \quad (-\infty,\ a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}\ ;$$

$$(a,\ \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}\ ; \quad [a,\ \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}\ .$$

Valore assoluto Se a è un numero reale, si dice valore assoluto di a e si indica con $|a|$ il numero reale così definito:

$$\begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

si ha quindi che $|a|^2 = a^2$.

Un'importante proprietà del valore assoluto è la seguente **Disuguaglianza triangolare**

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

che può essere dimostrata elevando al quadrato entrambi i membri (che sono sicuramente non negativi). Infatti $(a + b)^2 \leq a^2 + b^2 + 2 \cdot |a| \cdot |b|$ ovvero $ab \leq |a| \cdot |b|$ che è evidentemente vera per ogni scelta di a e b (se a e b sono discordi il primo membro è non positivo e il secondo è non negativo; se sono concordi vale il segno di uguaglianza). Si ha anche

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}\ .$$

Dalla definizione di valore assoluto segue che i rapporti $\dfrac{x}{|x|}$ e $\dfrac{|x|}{x}$ assumono entrambi il valore 1 se $x > 0$ ed il valore -1 se $x < 0$. La funzione definita da questi rapporti prende il nome di "segno di x" e si indica usualmente con **Segno di x**

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \text{non definita} & \text{se } x = 0\ . \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Con questa definizione possiamo dire che ogni numero $x \neq 0$ è uguale al proprio valore assoluto moltiplicato per il proprio segno. Viceversa, il valore assoluto di un numero diverso da zero è uguale al numero stesso moltiplicato per il suo segno.

Esercizio 1.6 Considerati x, $-x$, $-|x|$, $|x|$, $|-x|$ individuare quali sono uguali e disporli in ordine crescente, distinguendo il caso $x \geq 0$ dal caso $x < 0$.

Esercizio 1.7 Individuare i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ caratterizzati dalle seguenti diseguaglianze

a) $\|x\| > 5$	b) $\|x\| < 3$
c) $\|x - 4\| < 3$	d) $\|x - 5\| \geq 2$
e) $\|x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2)\| > 0$	f) $\|x + 1\| + \|x + 2\| < 1$

Radice quadrata Si suppongono noti i radicali e le relative proprietà. Si vuole soltanto puntualizzare che, per quanto alcuni radicali abbiano senso anche quando il radicando è negativo, altri hanno senso soltanto quando il radicando è non–negativo. L'esempio più comune è la "radice quadrata".

Con il simbolo $\sqrt{x}$ **non** si indica quel "numero il cui quadrato è x", perché, se $x \neq 0$, $t^2 = x$ implica $(-t)^2 = x$. Una definizione corretta è "la radice quadrata di

x è, se esiste, l'unico numero non negativo il cui quadrato è x".

Questa definizione rende conto del fatto che l'insieme $\mathcal{A}$ su cui è definibile la radice quadrata è $\mathbb{R}^+$ e che $\forall x \in \mathbb{R}^+$ anche $\sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$.

Occorre fare molta attenzione ad alcune manipolazioni che lo studente è abituato a fare automaticamente. Alla domanda "quanto fa $\sqrt{x^2}$?" la grande maggioranza degli studenti risponde "x". La risposta è giusta se $x \geq 0$, ma è errata se $x < 0$ in quanto una radice quadrata non può essere negativa. D'altra parte x^2 è sempre non negativo e quindi la funzione $\sqrt{x^2}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Se $x < 0$, $x^2 = (-x)^2$ e $-x$ è non negativo. Allora se $x < 0$ si ha che $\sqrt{x^2} = -x$. Cioè, in una unica formula

$$\sqrt{x^2} = |x| \ .$$

Torneremo sul problema dei radicali più avanti, dopo aver definito la potenza fra numeri reali.

Potenza ad esponente naturale

Una definizione di potenza ad esponente naturale è la seguente:

$$x^n = 1 \cdot x \cdot x \cdot \ \cdots \ \cdot x \ ,$$

dove a secondo membro sono presenti n fattori x.

Proprietà della potenza ad esponente naturale

Le proprietà formali del prodotto, proprietà associativa ($a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$) e commutativa ($a \cdot b = b \cdot a$), forniscono immediatamente le seguenti proprietà della potenza ad esponente naturale.

$$\begin{cases} x^{n+m} = x^n \cdot x^m \\ (x^n)^m = x^{nm} = (x^m)^n \ . \end{cases} \tag{1.1}$$

Sono di immediata verifica anche le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \text{se } x > 1 \text{ e } n < m & \text{allora } x^n < x^m \\ \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } n < m & \text{allora } x^n > x^m \ . \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\text{se } 0 < x < y \text{ allora } x^n < y^n \ . \tag{1.3}$$

Per rendere intuitiva e facilmente memorizzabile la cosa lo studente può ricordare il caso $x = 2$ e $x = 1/2$. Si ha infatti $2^3 < 2^5$, in quanto $2^3 = 8 < 32 = 2^5$; inoltre $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = \frac{4}{32} < \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

Potenze con esponente intero relativo

Passiamo ora agli esponenti interi relativi. Sia $a \in \mathbb{Z}$. Se $a \geq 0$, allora a coincide con un numero naturale e quindi possiamo usare la definizione precedentemente data. Basta quindi dare una nuova definizione, tenendo come filo conduttore il fatto che vogliamo salvaguardare le proprietà 1.1, nel caso $a < 0$.

Se $a = -n$, $n \in \mathbb{N}_*$, $x \neq 0$, definiamo

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \ .$$

Lo studente può facilmente verificare che le 1.1 valgono ancora e si può aggiungere la proprietà, se $x \neq 0$,

$$x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b} \ .$$

Le proprietà (1.2) restano invariate.

Potenze con esponente razionale

Passiamo ora agli esponenti razionali.
Sia $a \in \mathbb{Q}$. Se a è un intero relativo usiamo le precedenti definizioni. Occorre una nuova definizione se $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
Sia allora $a = \dfrac{p}{q}$, dove $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$, con $q > 1$. Poiché vogliamo che valgano le proprietà (1.1), deve essere

$$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{1/q} = (x^{1/q})^p \ ;$$

basta porre una nuova definizione nel caso $a = \dfrac{1}{q}$. Sempre per le (1.1), deve essere

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q = x = 1 \cdot x^{\frac{1}{q}} \cdot x^{\frac{1}{q}} \cdot \ \cdots \ \cdot x^{\frac{1}{q}} \ ,$$

con esattamente q fattori x , l'unica definizione coerente è

$$x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x} \ .$$

Evidentemente, se $x < 0$, non possiamo porre questa definizione se q è un numero pari. <u>Ma non possiamo porla neanche se q è un numero dispari.</u> Infatti dovrebbe essere

$$x^{\frac{1}{q}} = x^{\frac{2}{2q}} = (\sqrt[2q]{x})^2 \ .$$

Ma $2q$ è un numero pari e quindi non possiamo definire $\sqrt[2q]{x}$.
Possiamo quindi estendere la definizione di potenza agli esponenti razionali, salvaguardando le proprietà 1.1 soltanto se la base $x \in \mathbb{R}^+_*$.
Se l'esponente è positivo allora, anche se un po' impropriamente, si può accettare $x = 0$ e si ha che $0^a = 0$
Già il risultato di una potenza a base razionale ed esponente razionale può non essere razionale.

Potenza ad esponente irrazionale e sue proprietà

Passiamo ora a definire la potenza ad esponente irrazionale. Esula dagli scopi di questo testo dimostrarlo, ma anche per le potenze ad esponente irrazionale, valgono le proprietà mostrate sopra per le potenze ad esponente razionale.

Proprietà delle potenze

In conclusione, dato $x > 0$ e $a \in \mathbb{R}$ è ben definito il numero x^a. Riassumiamo, per comodità dello studente, le principali proprietà che caratterizzano le potenze.

Dati $x > 0, y > 0,\ a, b \in \mathbb{R}$, si ha:

$$\begin{cases} x^{a+b} = x^a \cdot x^b \\ (x^a)^b = x^{ab} = (x^b)^a \\ (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a \\ \text{se } x > 1 \text{ e } a < b \text{ allora } x^a < x^b \\ \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } a < b \text{ allora } x^a > x^b \\ \text{se } 0 < x < y \text{ e } a > 0 \text{ allora } x^a < y^a \\ \text{se } 0 < x < y \text{ e } a < 0 \text{ allora } x^a > y^a \ . \end{cases}$$

Esercizio 1.8 Disporre in ordine crescente le seguenti potenze:

a) $2^{1/3}$ $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3}$ $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{4}$ $(0,3)^5$ $(0,2)^6$

b) $2^{\frac{1}{3}}$ $2^{\frac{3}{4}}$ 2^{-2}

c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

Esercizio 1.9 Risolvere le seguenti equazioni:

a) $2^{-x} = 32$ b) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{2\sqrt{x}} + 3 = 0$

c) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^{7}$ d) $3^{|x^2-3x+2|} = 9^{x+1}$

A questo punto possiamo rivisitare il collegamento fra radicali e potenze ad esponente frazionario. Se vogliamo scrivere un radicale come potenza ad esponente frazionario dobbiamo scrivere

$$\sqrt[q]{x^p} = \begin{cases} x^{\frac{p}{q}} & \text{se } p \text{ è pari e } x \geq 0 \\ |x|^{\frac{p}{q}} & \text{se } p \text{ è pari e } x < 0 \\ \operatorname{sgn}(x)|x|^{\frac{p}{q}} & \text{se } p \text{ è dispari e } q \text{ è dispari} \\ \text{non ha senso} & \text{se } p \text{ è dispari, } q \text{ è pari e } x < 0 \ . \end{cases}$$

Logaritmi Dato un numero reale positivo b, detto base, e un numero reale positivo a, si dice che x **è il logaritmo di** a **in base** b se $b^x = a$. Comunemente viene utilizzata la notazione $x = \log_b(a)$. Ad esempio, il logaritmo di 8 in base 2 è 3, infatti $2^3 = 8$.

Dalla definizione di logaritmo seguono immediatamente le seguenti relazioni con l'esponenziale

$$b^{\log_b(a)} = a \qquad \forall a \in \mathbb{R}^+_* \ ,$$

$$\log_b(b^a) = a \qquad \forall a \in \mathbb{R} \ .$$

Si noti che la prima uguaglianza ha senso solo per $a > 0$ e che la seconda ha senso $\forall a \in \mathbb{R}$.

La prima uguaglianza rende conto della definizione "il logaritmo in base "b" di a

è quel numero a cui elevare "b" per ottenere a" che lo studente dovrebbe aver già incontrato.

Le più comuni proprietà dei logaritmi, indotte dalle proprietà delle potenze, sono: **Proprietà dei logaritmi**

j) $\log_b(xy) \;=\; \log_b(x) + \log_b(y)$;

jj) $\log_b(\frac{x}{y}) \;=\; \log_b(x) - \log_b(y)$;

jjj) $\log_b(x^\alpha) \;=\; \alpha \log_b(x)$;

jv) $\log_a(x) \;=\; \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

Notiamo esplicitamente che queste uguaglianze valgono quando sia x che y appartengono al campo di definizione del logaritmo, cioè sono ambedue positivi. I domini di esistenza dei primi membri e dei secondi membri possono essere diversi. In particolare la jjj), usata con α numero intero relativo pari, per $x < 0$ deve essere scritta come

$$\log_a(x^\alpha) \;=\; \alpha \log_a |x| \,.$$

Le dimostrazioni delle quattro formule si ottengono sfruttando le proprietà degli esponenziali,

$$x = y \iff a^x = a^y \,,$$

cioè per dimostrare l'uguaglianza di due numeri si dimostra che sono uguali i valori che l'esponenziale assume in essi.

Completare le altre formule seguendo la casistica dei segni di x e di y. **Esercizio 1.10**

Risolvere le seguenti equazioni: **Esercizio 1.11**

a) $\log_x 64 = 6$ b) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = x$

c) $\log_7 x = \dfrac{1}{3}$ d) $\log_x x^2 = 1$

e) $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{2}{3}$ f) $\log_{2x} x^2 = 3$

Determinare i valori di x per cui le seguenti uguaglianze sono corrette: **Esercizio 1.12**

a) $\log_2 \dfrac{x}{x-1} = \log_2 x - \log_2(x-1)$

b) $\log(x+1)^2 = 2\log(x+1)$

Risolvere le seguenti equazioni: **Esercizio 1.13**

a) $\log(x-2) - \log(2x-1) = 0$ b) $\log_{10} x + \log_{10}(2x) + \log_{10}(4x) = -3$

c) $x^{\log_x (x+3)^2} = 16$ d) $2\log_b^5 x = 5\log_b x - 3\log_b^3 x$

e) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$ f) $\log\sqrt{x+1} + \log\sqrt{x-1} = 1$

Esercizi di riepilogo del capitolo 1

1.14 Determinare la scomposizione in fattori primi del numero 12^{12}.

1.15 Determinare la metà di 2^{12}.

1.16 Disporre in ordine crescente i seguenti numeri:

$$2^{1000} \qquad 2^{2002} \qquad 4^{1002} \qquad 6^{500} \qquad 8^{600}\ .$$

1.17 Determinare i valori di a, b, c che rendono vere le seguenti uguaglianze:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[a]{5} \qquad \sqrt[3]{5\sqrt{5}} = \sqrt[b]{5} \qquad \sqrt[5]{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[c]{3}\ .$$

1.18 Determinare i valori di α, β, γ che rendono vere le seguenti uguaglianze:

$$(2^7)^\alpha = 2^{21} \qquad 2^7 + 2^7 = 2^\beta \qquad 2^7 \cdot 2^7 = 2^\gamma\ .$$

1.19 Calcolare

$$\log_2\left(32 \cdot 8^4\right) \qquad 9^{\log_3 5} \qquad 5^{2+\log_5 3}\ .$$

1.20 Risolvere

$$3^{2x-3} = 81 \qquad 2^{(x^2)} = 1 \qquad 2^{|x|} = 128^3 \qquad 2^{-x} = -32.$$

1.21 Siano $A = \{n \in \mathbb{N}|\ 1 \leq n\ \&\ \ n\ \text{ pari }\}$, $B = \{n \in \mathbb{N}|\ 1 \leq n\ \&\ \ n\ \text{ multiplo di } 3\}$, $C = \{n \in \mathbb{N}|\ 1 \leq n\ \&\ \ n\ \text{ multiplo di } 4\}$. Allora

$A \cap C =$

$A \cap B =$

$A \setminus C =$

$B \cup C =$

1.22 Siano $A = \{x \in \mathbb{R}|\ -1 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}| -2 < x < 2\}$, $C = [-2, -1)$ Allora

$A \setminus B =$

$C \cup B =$

$A \cap C =$

Capitolo 2

Cenni di geometria euclidea

Non è certamente possibile esporre in questo capitolo tutti gli aspetti della geometria legati ad un impostazione assiomatica, con le conseguenti dimostrazioni. Ci limitiamo a esporre alcune definizioni di enti geometrici fondamentali, alcune proprietà rilevanti, e alcuni teoremi (senza dimostrazione), oltre a qualche formula utile.

Enti primitivi: punto, retta, piano

Iniziamo dalla "definizione" degli enti geometrici fondamentali. Quelle che daremo non sono vere definizioni, ma ci rifaremo al concetto intuitivo che ciascuno di noi ha di tali enti. Il **punto** è un ente geometrico che non ha né forma né dimensione; la **retta** può essere ingenuamemte immaginata come la linea che si ottiene prolungando nei due sensi un filo ben teso; il concetto di **piano** è associato all'idea di una superficie ben levigata e assolutamente priva di curvatura.

Retta passante per uno e due punti

Per ogni punto del piano passano infinite rette; dati due punti distinti, esiste ed è unica la retta che passa per entrambi.

Posizione reciproca di due rette nel piano

Due rette nel piano possono essere
Incidenti se hanno un solo punto in comune;
Parallele non coincidenti se non hanno punti in comune;
(Parallele) Coincidenti se hanno tutti i loro punti in comune.

Semiretta

Consideriamo una retta r e fissiamo su di essa un verso di percorrenza e un punto O. In questo modo, si individuano due sottoinsiemi di r: quello dei punti che precedono O e quello dei punti che seguono O. Ciascuno dei due sottoinsiemi è detto semiretta di origine O.

Segmento Dati due punti distinti A e B appartenenti a una stessa retta r, diciamo segmento AB il sottoinsieme di r costituito da A, B, e da tutti i punti compresi fra A e B. I punti A e B sono detti estremi del segmento, ogni altro suo punto è detto punto interno, i punti che non appartengono al segmento sono detti punti esterni. Due segmenti si dicono consecutivi quando hanno un estremo in comune, si dicono adiacenti due segmenti consecutivi che appartengono alla stessa retta

Insieme convesso Un sottoinsieme $\mathcal{C}$ della retta o del piano si dice convesso se per ogni coppia di punti A, B di $\mathcal{C}$ tutto il segmento che congiunge A con B è contenuto in $\mathcal{C}$.

Angoli Chiameremo angolo ciascuna delle quattro parti in cui resta suddiviso un piano da due rette non parallele. Per individuare in maniera univoca una di queste quattro parti, possiamo prima orientare le due rette, poi stabilire quale è la "prima" retta e quale è la "seconda" retta.

Allora chiameremo angolo individuato dalla coppia ordinata di semirette orientate $(r,\ s)$, aventi l'origine in comune, la parte di piano che viene "spazzata" dalla semiretta positiva della prima retta ruotando intorno all'origine in senso antiorario per sovrapporsi alla seconda.

Chiameremo "vertice" dell'angolo il punto in comune alle due semirette e "lati" dell'angolo le due semirette.

Questa definizione lascia alquanto a desiderare quanto a rigore perché fa ricorso a termini, che pur facendo parte del bagaglio intuitivo dello studente, sono piuttosto delicati a definirsi. Tuttavia è sufficientemente comprensibile dallo studente ed è coerente con quanto può essere fatto rigorosamente.

Notare una grossa ambiguità quando le due semirette coincidono! Qual è l'angolo individuato in questo caso? L'insieme costituito dai punti delle semirette o tutto il piano?

In questo caso, per evitare complicazioni formali, diremo esplicitamente quale dei due insiemi ci interessa.

Chiameremo *angolo nullo* l'angolo costituito solo dai punti di due semirette orientate e coincidenti, chiameremo *angolo giro* l'angolo costituito da tutto il piano. Nel caso dell'angolo giro è pur sempre necessario specificare il vertice ed i lati. Chiameremo *angolo piatto* l'angolo i cui lati stanno l'uno sul prolungamento dell'altro. Chiameremo *angolo retto* l'angolo individuato da due semirette perpendicolari. Due angoli di sicono *supplementari* se hanno per somma un angolo piatto e *complementari* se hanno per somma un angolo retto.

Confronto fra angoli

Dati due angoli A e A' cosa vuol dire che sono "uguali" o che uno è "minore" dell'altro? L'usare brutalmente l'inclusione insiemistica non è sufficiente perché può accadere, ad esempio, che due angoli "intuitivamente" uguali non coincidano insiemisticamente (vedi figura 2.1). Prima di confrontare insiemisticamente due angoli occorre fare una operazione semplice dal punto di vista intuitivo ma complicata dal punto di vista formale: occorre "spostare" il secondo angolo senza "deformarlo" in modo che i due vertici coincidano e che le semirette che costituiscono il primo lato coincidano. Una tale operazione è quello che viene chiamato "spostamento rigido". A questo punto due angoli A ed A', aventi il vertice ed il primo lato in comune, sono uguali se $A = A'$ insiemisticamente, A è minore od uguale ad A' se $A \subset A'$.

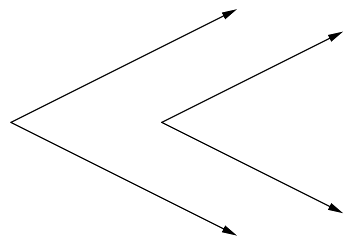

Figura 2.1: Confronto fra angoli

Misura degli angoli: radiante

Nasce naturalmente il problema della misura degli angoli. Lo studio approfondito della problematica della misura esula dagli scopi di questo corso. Occorre definire la somma di due angoli, il multiplo intero di un angolo, il multiplo razionale di un angolo, il multiplo reale di un angolo. A questo punto basta fissare un angolo come unità di misura, per avere una misura completa degli angoli. Chiameremo "radiante" quell'angolo α tale che $2\pi\alpha$ è uguale all'angolo giro.

Dando questa definizione, sono state nascoste delle grosse difficoltà, non ultima la definizione di π. Il procedimento standard per definire la misura degli angoli consiste nel considerare l'intersezione dell'angolo con un cerchio di centro il vertice dell'angolo e di raggio 1, quindi prendere come misura in "radianti" dell'angolo la misura dell'arco intersezione della circonferenza, che costituisce il bordo del cerchio, con l'angolo. Questa definizione richiede di saper "misurare" la lunghezza di un arco di circonferenza. Ciò può essere fatto con una definizione ad hoc che sorvola sulle difficoltà intrinseche della definizione di lunghezza di un arco di curva. Notare che, qualunque definizione si sia data, in un settore circolare il cui angolo al centro misura un radiante l'arco di circonferenza che lo delimita ha misura pari al raggio. La misura dell'angolo giro è per definizione 2π, la misura dell'angolo piatto vale π, la misura di un angolo retto vale $\pi/2$. Un angolo che misura meno di $\pi/2$ è detto *acuto*, se misura più di $\pi/2$ è detto *ottuso*.

Rette perpendicolari

Due rette incidenti sono dette perpendicolari se formano quattro angoli retti. La perpendicolare condotta ad una retta data da un punto qualsiasi del piano esiste ed è unica. Rette perpendicolari ad una stessa retta sono parallele fra loro.

Distanza di un punto da una retta Si dice distanza di un punto P da una retta r la lunghezza del segmento di perpendicolare condotto da P a r.

Bisettrice di un angolo Si dice bisettrice di un angolo la semiretta, avente origine nel vertice dell'angolo stesso, che lo divide in due parti uguali. La bisettrice è l'insieme di tutti e soli i punti del piano che sono equidistanti dai lati dell'angolo.

Il postulato delle parallele espresso in tre modi equivalenti In geometria euclidea, le seguenti affermazioni sono equivalenti:
Data una retta r e un punto P non appartenente ad essa, esiste ed è unica la retta parallela ad r e passante per P.
La somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.
Due rette tagliate da una trasversale sono parallele se e sole se formano angoli alterni interni uguali fra loro.

Teorema di Talete Due trasversali a e b che incontrano tre rette parallele r_1, r_2, r_3 rispettivamente in A_1, A_2, A_3 e B_1, B_2, B_3 determinano quattro segmenti A_1A_2, A_2A_3, e B_1B_2, B_2B_3, tali che

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}.$$

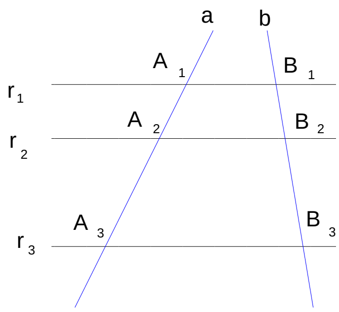

Figura 2.2: Teorema di Talete.

Triangolo Si dice triangolo la parte di piano racchiusa da tre segmenti, che congiungono a due a due tre punti non allineati. Un triangolo si dice *isoscele* se ha almeno due lati uguali, *equilatero* se ha i tre lati uguali, *scaleno* se i lati hanno tutti lunghezza diversa. Un triangolo avente tutti gli angoli acuti è detto *acutangolo*, se ha un angolo ottuso e due acuti è detto *ottusangolo*, se ha un angolo retto e due acuti è detto *rettangolo*. In un triangolo rettangolo i lati che formano l'angolo retto sono detti cateti, il lato opposto all'angolo retto è detto ipotenusa

Disuguaglianza triangolare Ogni lato di un triangolo è minore della somma degli altri due ed è maggiore della loro differenza. Affinché tre segmenti possano essere lati di un triangolo è necessario e sufficiente che ciascuno di essi sia minore della somma degli altri due.

Teorema dell'angolo esterno Si dice angolo esterno di un triangolo ogni angolo adiacente ad un angolo interno. In un triangolo ogni angolo esterno è la somma dei due angoli interni non adiacenti. Nell'esempio in figura, $\gamma = \pi - \delta = \alpha + \beta$.

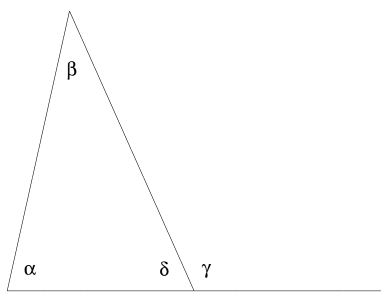

Figura 2.3: Teorema dell'angolo esterno.

Teorema di Pitagora

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa ha area pari alla somma delle aree costruite sui cateti. Detta a la lunghezza dell'ipotenusa e b, c le lunghezzedei cateti, si ha quindi che $a^2 = b^2 + c^2$.

Primo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto ha la stessa area del rettangolo che ha per lati l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.

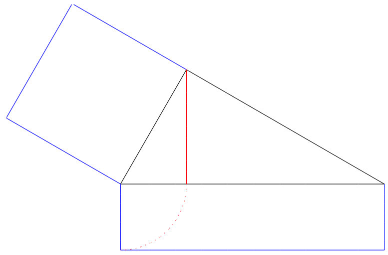

Figura 2.4: Primo teorema di Euclide.

Secondo teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa ha la stessa area del rettangolo che ha per lati le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

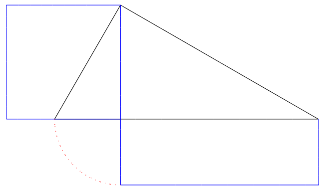

Figura 2.5: Secondo teorema di Euclide.

Altezza

Si dice altezza di un triangolo relativa ad un vertice il segmento della perpendicolare condotta del vertice considerato alla retta cui appartiene il lato opposto. Tale lato prende il nome di base.

Ortocentro

Le tre altezze di un triangolo o i loro prolungamenti si incontrano in un punto detto ortocentro. L'ortocentro è sempre interno al triangolo nei triangoli acutangoli, è esterno al triangolo nei triangoli ottusangoli e coincide col vertice dell'angolo retto nei triangoli rettangoli.

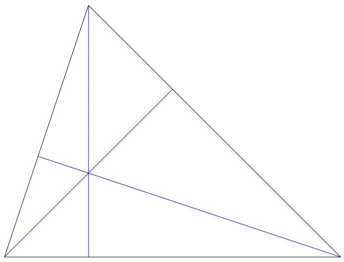

Figura 2.6: Ortocentro.

Mediana

Si dice mediana di un triangolo relativa ad un vertice il segmento che unisce questo vertice col punto medio del lato opposto.

Baricentro

Il punto in cui concorrono le mediane di un triangolo è detto baricentro. Il baricentro divide ogni mediana in due parti, di cui quella che ha un estremo nel vertice è doppia dell'altra. Il baricentro è sempre interno al triangolo.

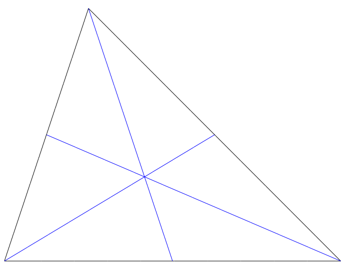

Figura 2.7: Baricentro.

Circonferenza Si definisce circonferenza di centro O e raggio r l'insieme dei punti del piano che hanno distanza da O pari ad r. I segmenti che uniscono il centro O con i punti della circonferenza sono detti raggi. La lunghezza di una circonferenza di raggio r è uguale a $2\pi r$.

Cerchio Si definisce cerchio di centro O e raggio r l'insieme dei punti del piano che hanno distanza da O minore od uguale ad r.

Terema dell'angolo alla circonferenza In ogni circonferenza, l'angolo al centro è il doppio di ogni angolo alla circonferenza che insiste sul medesimo arco. Conseguenze di questo teorema sono le seguenti: (a) tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono uguali; (b) angoli alla circonferenza che insistono su archi uguali sono uguali.

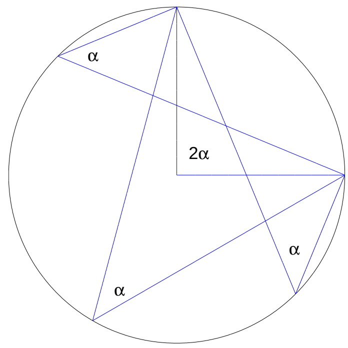

Figura 2.8: Angoli al centro e alla circonferenza.

Circocentro Il centro O del cerchio circoscritto al triangolo è detto circocentro. Il circocentro è il punto d'incontro degli assi dei lati. Se S è l'area del triangolo e a, b, c le misure dei lati, si ha $S = \dfrac{abc}{4R}$, dove R è il raggio della circonferenza circoscritta; inoltre si ha $r \cdot R = \dfrac{abc}{4p}$ ove r è il raggio del cerchio inscritto e p il semiperimetro del triangolo. Il circocentro è interno al triangolo nei triangoli acutangoli, esterno al triangolo per i triangoli ottusangoli e nel punto medio dell'ipotenusa per i triangoli rettangoli.

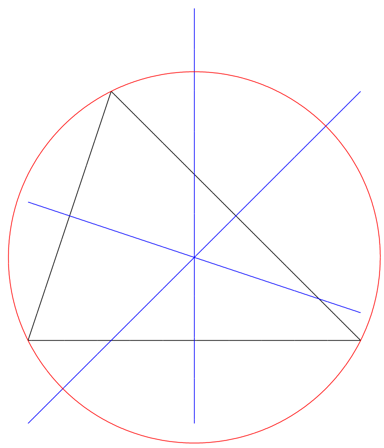

Figura 2.9: Circocentro.

Incentro Il centro del cerchio inscritto al triangolo è detto incentro. Esso è il punto di incontro delle bisettrici interne del triangolo. Se R è il raggio del cerchio circoscritto e r quello del cerchio inscritto si ha $R^2 - d^2 = 2Rr$, dove d è la distanza fra l'incentro e il circocentro. Se p è il semiperimetro del triangolo la sua area S è data da $S = p \cdot r$. L'incentro è sempre interno al triangolo.

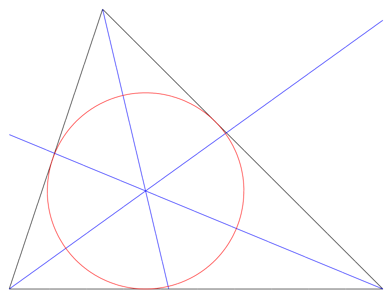

Figura 2.10: Incentro.

Si dice spezzata o poligonale una linea formata da tre o più segmenti consecutivi. I segmenti che la costituiscono e i loro estremi si dicono rispettivamente lati e vertici della poligonale. Una poligonale si dice intrecciata se almeno due lati hanno in comune in punto che non sia vertice. **Poligonale**

Si dice poligono la parte di piano racchiusa da una poligonale chiusa non intrecciata. Un poligono si dice convesso se nessuno dei prolungamenti dei suoi lati lo attraversa, concavo in caso contrario. Un poligono si dice equilatero se ha tutti i lati uguali, equiangolo se ha tutti gli angoli uguali. Un poligono equilatero ed equiangolo è detto *regolare*. **Poligono**

In un poligono si dice diagonale il segmento che unisce due vertici non consecutivi. Un triangolo non ha diagonali. Se $N > 3$ è il numero di lati di un poligono, il numero di diagonali di quel poligono è $N(N-3)/2$. Ad esempio, se $N = 4$, il poligono (detto quadrilatero) ha due diagonali. **Diagonale**

La somma degli angoli interni di un poligono è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due. In particolare, la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un angolo giro. **Somma degli angoli interni di un poligono**

Si dice trapezio un quadrilatero che ha due lati opposti paralleli e gli altri due non paralleli. I due lati paralleli sono detti *basi*, mentre la loro distanza si chiama *altezza*. Un trapezio si dice *rettangolo* se un lato è perpendicolare alle basi, *isoscele* se i lati non paralleli sono uguali fra loro. **Trapezio**

Un quadrilatero con i lati paralleli a due a due è detto parallelogramma. Un parallelogramma ha i lati opporti uguali, gli angoli opposti uguali, due angoli adiacenti supplementari e le diagonali che sono divise a metà dal loro punto di intersezione. Ciascuna diagonale divide il parallelogramma in due triangoli uguali. **Parallelogramma**

Un quadrilatero con quattro angoli retti è detto rettangolo. Un rettangolo è anche un parallelogramma. Si noti che in un rettangolo le diagonali sono uguali. **Rettangolo**

Si dice rombo un parallelogramma avente i quattro lati uguali. In un rombo le diagonali sono perpendicolari. **Rombo**

Si dice quadrato un parallelogrammo che ha i quattro lati uguali e i quattro angoli uguali. Le diagonali di una quadrato sono uguali, perpendicolari e si dimezzano scambievolmente. **Quadrato**

Poligoni inscritti e ciroscritti Un poligono si dice *inscrivibile in una circonferenza* se esiste una circonferenza (detta circonferenza circoscritta) alla quale appartengono tutti i vertici del poligono; *circoscrivibile ad una circonferenza* se esiste una circonferenza (detta circonferenza inscritta) alla quale tutti i lati del poligono sono tangenti. Ogni triangolo è inscrivibile e circoscrivibile. Un quadrilatero è inscrivibile se e solo se la somma degli angoli opposti è un angolo piatto ed è circoscrivibile se e solo se la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due. Ogni poligono regolare è sempre inscrivibile e circoscrivibile, la circonferenza inscritta e circoscritta hanno i centri coincidenti nel cosiddetto *centro del poligono*.

Apotema Si dice apotema a il raggio della circonferenza inscritta in un poligono regolare, cioè la distanza del centro del poligono da un lato. Anticipiamo una formula di trigonometria: in un poligono regolare avente N lati di lunghezza l, si ha $a = \frac{l}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{(N-2)\pi}{2N}\right)$. In un triangolo equilatero l'apotema è $1/3$ dell'altezza, in una quadrato l'apotema è metà del lato.

Area del triangolo L'area del triangolo è uguale al semiprodotto della lunghezza della base per la lunghezza dell'altezza.

Formula di Erone Detti a, b, c i lati di un triangolo qualsiasi e $p = \frac{a+b+c}{2}$ il semiperimetro di tale triangolo, l'area S del triangolo vale $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Area del rettangolo L'area del rettangolo è uguale al prodotto della base per l'altezza.

Area del parallelogramma L'area del parallelogramma è uguale a quella di un rettangolo che ha la stessa base e la stessa altezza del parallelogramma.

Area del rombo L'area del rombo, e quella di qualuque quadrilatero avente le diagonali perpendicolari, è uguale al semiprodotto delle sue diagonali.

Area del quadrato L'area del quadrato è uguale al quadrato del lato, oppure alla metà del quadrato della diagonale.

Area del trapezio L'area del trapezio, è uguale al semiprodotto della somma delle basi per l'altezza.

Area di un poligono regolare L'area di un poligono regolare è uguale al semiprodotto del perimetro delpoligono per l'apotema. Più in generale, l'area di un poligono circoscritto ad una circonferenza è uguale al semiprodotto del perimetro per il raggio della circonferenza inscritta.

Area del cerchio L'area di un cerchio di raggio r è uguale a πr^2.

Poligoni simili Due poligoni si dicono simili se hanno gli angoli ordinatamente uguali e i lati corrispondenti proporzionali. Questa definizione è sovrabbondante nel caso dei triangoli; valgono infatti i seguenti criteri.

Criteri di similitudine dei triangoli

Due triangoli sono simili se vale uno qualunque dei seguenti fatti equivalenti:
– hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso uguale;
– hanno i tre angoli uguali;
– hanno i tre lati in proporzione.

Rapporto fra aree

Il rapporto fra le aree di due poligoni simili è pari al quadrato del rapporto fra due lati omologhi.

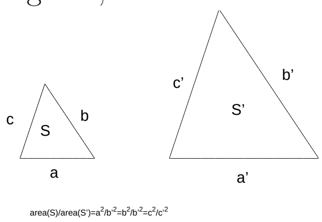

Figura 2.11: Rapporto fra aree.

Simmetria rispetto ad una retta

Ricordiamo che un sottoinsieme del piano è simmetrico rispetto ad una retta se, per ogni punto P appartenente ad esso, ne esiste un altro P', sempre appartenente ad esso, sulla perpendicolare per P alla retta di simmetria ed alla stessa distanza di P. Cioè, detto H il piede della perpendicolare, P' si trova dall'altra parte della retta rispetto a P e $PH = P'H$. Vedi figura 2.12.

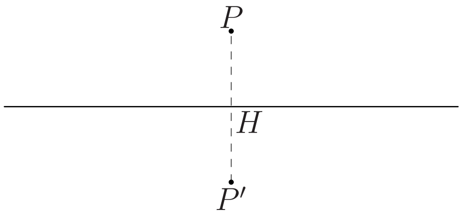

Figura 2.12: Simmetria rispetto ad una retta

Simmetria rispetto ad un punto

Un sottoinsieme del piano è simmetrico rispetto ad un punto Q se, per ogni punto P appartenente ad esso, ne esiste un altro P', sempre appartenente ad esso, sulla retta passante per P e Q, esterno al segmento PQ e tale che $PQ = P'Q$. Vedi figura 2.13.

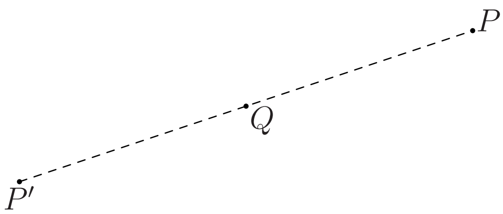

Figura 2.13: Simmetria rispetto ad un punto

Capitolo 3

Piano cartesiano e geometria analitica

Sistema di riferimento Fissiamo nel piano due rette fra loro perpendicolari (e pensiamo al piano della lavagna o al foglio del quaderno considerando la prima retta parallela alla retta che unisce i nostri occhi). Sia O il punto d'intersezione delle due rette e fissiamo sulla prima retta un punto U e sulla seconda un punto V (distinti da O) (pensando il punto U situato a destra di O e V "in alto" rispetto ad O). Le due rette si diranno rispettivamente asse delle x e asse delle y. $(O,\ U,\ V)$ si dice un sistema di riferimento nel piano ed O si dirà l'origine del sistema di riferimento (vedi figura 3.1). Generalmente, ma non necessariamente, si pone $\overline{OU} = \overline{OV}$.

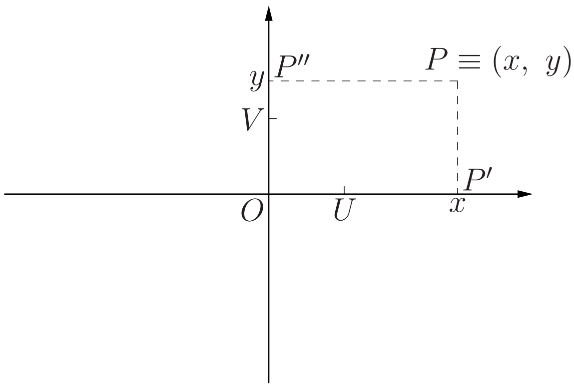

Figura 3.1: Sistema di riferimento

Coordinate cartesiane Consideriamo ora un punto P del piano, e ne siano P' e P'' le proiezioni ortogonali sulle rette considerate. Al punto P facciamo corrispondere due numeri reali, che indichiamo con x e y, ove x è la lunghezza (rispetto all'unità di misura OU) del segmento OP' (considerata positiva se P' giace sulla semiretta OU, negativa in caso contrario), ed y è la lunghezza (rispetto all'unità di misura OV) del segmento OP'' (considerata positiva se P'' giace sulla semiretta OV, negativa in caso contrario). In questo modo ad ogni punto P del piano viene associata una coppia ordinata $(x,\ y)$ di numeri reali, che sono dette le coordinate di P (più precisamente x si dice l'ascissa e y l'ordinata di P) e viceversa.

Il piano, nell'identificazione presentata con $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si dice piano cartesiano. Il piano cartesiano risulta particolarmente utile per la trattazione algebrica di problemi geometrici (e viceversa!). **Piano cartesiano**

Rappresentare nel piano cartesiano gli insiemi dei punti $P(x,\ y)$ le cui coordinate verificano le seguenti condizioni: **Esercizio 3.1**

a) $|x| < 1$ b) $|y| > 2$

c) $x \geq y$ d) $xy > 0$

e) $|x - 2| < 1$ f) $|y + 3| < 1$

Consideriamo ora una retta r non parallela ai due assi e passante per O. Se consideriamo un punto generico P di r le sue coordinate $(x,\ y)$ sono tali che il rapporto $\frac{y}{x}$ è uguale ad una costante reale m (dipendente dalla retta r) e dunque i punti di r sono tutti e soli quelli le cui coordinate verificano l'equazione **Equazione della retta**

$$y = mx\ .$$

L'equazione invece di una retta parallela alla precedente ed intersecante l'asse delle y nel punto di coordinate $(0,\ q)$ ha equazione

$$y = mx + q\ .$$

La retta parallela alla precedente e passante per il punto $P(x_0,\ y_0)$ ha equazione

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

In entrambi i casi m si dice la pendenza o coefficiente angolare della retta considerata.
Le rette parallele all'asse delle x hanno invece equazione $y = c$ e quelle parallele all'asse delle y hanno equazione $x = c$.
In definitiva tutte le rette possono essere scritte nella forma

$$ax + by + c = 0 \quad (a,\ b \text{ non entrambi nulli}),$$

e viceversa ogni equazione della forma precedente ha per soluzione l'insieme delle coordinate dei punti di una retta.

Dati i punti $A(2,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(1,\ 1)$, $D(4,\ -1)$ verificare quali terne costituite da tre dei quattro punti siano allineate **Esercizio 3.2**

Dati i punti $A(2,\ 2)$, $B(2,\ -1)$, $C(0,\ 2)$, tra le rette passanti per $P(1,\ 1)$ caratterizzare, mediante una condizione sul coefficiente angolare, quelle che intersecano **Esercizio 3.3**

a) il segmento AB

b) il segmento AC.

Equazione della retta passante per due punti Siano dati due punti distinti P_1 e P_2 di coordinate $(x_1,\ y_1)$ e $(x_2,\ y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$. L'equazione della retta passante per P_1 e P_2 è allora data da

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \ . \tag{3.1}$$

D'ora in poi considereremo il sistema di riferimento monometrico, tale cioè che $\overline{OU} = \overline{OV}$.

Rette perpendicolari Sia $y = mx + q$ l'equazione di una retta, e supponiamo $m \neq 0$ (cosa significa?). Non è difficile convincersi (vedi figura 3.2) che l'equazione di una retta perpendicolare ad essa ha la forma

$$y = -m^{-1}x + q' \ .$$

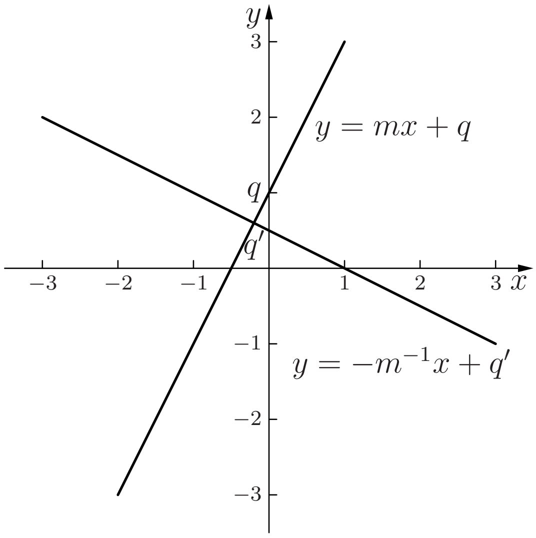

Figura 3.2: Rette perpendicolari

Cosa succede se la retta non è della forma sopra detta, se cioè è parallela ad uno degli assi?

Esercizio 3.4 Si verifichi che se l'equazione di una retta è espressa nella forma $ax + by + c = 0$ allora le rette ad essa parallele sono tutte e sole quelle la cui equazione può essere espressa nella forma $a'x + b'y + c' = 0$ con $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ (di più, le due equazioni rappresentano la stessa retta se, e solo se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$) mentre quelle ad essa perpendicolari sono tutte e sole quelle la cui equazione può essere espressa nella forma $a''x + b''y + c'' = 0$ con $a \cdot a'' + b \cdot b'' = 0$, ovvero quindi nella forma $bx - ay + c'' = 0$.

Esercizio 3.5 Date le rette di equazione $3x + 2y - 3 = 0$, $2x - 3y + 4 = 0$, $2x - y + 2 = 0$, $3x + 2y + 5 = 0$ individuare le coppie di rette parallele e perpendicolari e le coordinate dei punti di intersezione.

Distanza fra due punti Consideriamo due punti P_1 e P_2 di coordinate $(x_1,\ y_1)$ e $(x_2,\ y_2)$. Nell'usuale geometria euclidea del piano, la distanza fra due punti $d(P_1,\ P_2)$ è data da

$$d(P_1,\ P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \ .$$

Esercizio 3.6 Individuare quali coppie di punti $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$ hanno distanza che può essere scritta nella forma

a) $\overline{PQ} = |x_2 - x_1|$

b) $\overline{PQ} = |y_2 - y_1|$

Esprimere le coordinate del punto medio dei punti $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$ in funzione delle coordinate di P e Q. **Esercizio 3.7**

Dato il triangolo di vertici $A(1,\ 1)$, $B(2,\ 3)$, $C(4,\ 2)$ **Esercizio 3.8**

a) calcolarne il perimetro
b) scrivere le equazioni dei lati
c) verificare che è rettangolo
d) scrivere le equazioni delle mediane e verificare che il baricentro le divide in due segmenti che stanno nel rapporto 2 : 1.

Rappresentare nel piano cartesiano gli insiemi individuati dalle seguenti condizioni: **Esercizio 3.9**

a) $|x| + |y| = x + y$ b) $|x| + |y| > x + y$
c) $x + y + 1 > 1$ d) $x + |y| + 1 < 0$
e) $\begin{cases} y > x + 2 \\ y > -x + 3\ . \end{cases}$ f) $|y - x| < 1$

Distanza di una retta da un punto

Vediamo ora la distanza di una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ da un punto P di coordinate $(x_0,\ y_0)$.
Per prima cosa (vedi figura ...) consideriamo la retta s passante per $(x_0,\ y_0)$ e perpendicolare alla retta assegnata. Essa ha equazione del tipo

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0\ .$$

Infatti i coefficienti di x e y devono essere tali per quanto abbiamo già visto, ed il resto è dato dalla condizione di passaggio per il punto. Le coordinate del punto H di intersezione della retta s con r possono essere determinate risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette; la distanza d tra il punto d'intersezione H trovato ed il punto P è proprio la distanza cercata di P da r. Svolgendo un po' di calcoli (che omettiamo), si ha

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

Dati il punto $A(1,\ 2)$ e la retta r di equazione $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ **Esercizio 3.10**

a) scrivere l'equazione della retta per A perpendicolare a r
b) calcolare la distanza di A da r.

Date le rette di equazione $6x + 8y + 1 = 0$ e $4x - 3y - 1 = 0$ individuare il luogo geometrico dei punti equidistanti da esse e verificare che si tratta di una coppia di rette fra loro ortogonali. **Esercizio 3.11**

Rappresentazione parametrica della retta Passiamo ora a dare una rappresentazione parametrica di una retta. Siano P_0 e P_1 due punti di coordinate rispettivamente $(x_0,\ y_0)$ e $(x_1,\ y_1)$. Sia poi P un punto sulla retta P_0P_1, di coordinate $(x,\ y)$.
Per il teorema di Talete si ha

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = t\ ,$$

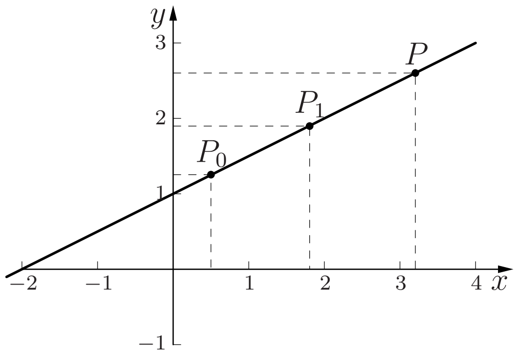

Figura 3.3: Equazione parametrica della retta

ove t è uguale al rapporto fra le distanze $\overline{P_0P}$ e $\overline{P_0P_1}$ preso con segno positivo se i due segmenti sono equiorientati e negativo nel caso opposto.
Si ottiene quindi

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0)\ . \end{cases} \tag{3.2}$$

Un punto P appartenente alla retta è dunque tale che esiste $t \in \mathbb{R}$ per cui sono verificate simultaneamente le due uguaglianze precedenti.
Viceversa sia $t \in \mathbb{R}$ per cui siano verificate le due uguaglianze precedenti. Ne viene allora (confronta con la 3.1)

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\ ,$$

ovvero $(x,\ y)$ verifica l'equazione della retta P_0P_1. In definitiva tale retta coincide con l'insieme

$$\{(x,\ y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R} \text{ tale che } x = x_0 + t(x_1 - x_0),\ y = y_0 + t(y_1 - y_0)\}\ .$$

L'espressione 3.2 si dice, come abbiamo detto, rappresentazione parametrica della retta poichè fornisce un punto della retta per ogni valore reale di t (parametro).
Nel caso si prendessero solamente valori di t nell'intervallo chiuso $[0,\ 1]$ si otterrebbero tutti e soli i punti del segmento P_0P_1, poiché per tali punti PP_0 è equiorientato con P_1P_0 e

$$0 \leq \frac{d(P,\ P_0)}{d(P_1,\ P_0)} \leq 1\ .$$

Esercizio 3.12 Tra i punti del piano dati da

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

individuare quello che ha distanza minima o massima dal punto $P(2,\ 1)$.

Esercizio 3.13

Due navi A e B hanno posizioni che sono espresse, nell'istante t da

$$A(t) \equiv (0,\ 5t) \qquad B(t) \equiv \left(1 - \frac{1}{2}t,\ 1 + 4t\right)$$

Descrivere il loro moto. Ci sarà collisione?

Equazione della circonferenza

Ricordiamo che l'equazione della circonferenza di centro $(x_0,\ y_0)$ e raggio r è

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\ .$$

Esercizio 3.14

Sotto quale condizione un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

rappresenta una circonferenza? Quale ne è il centro? Quale il raggio? Cosa rappresenta negli altri casi?

Esercizio 3.15

Scrivere le equazioni delle circonferenze

a) avente come diametro il segmento che gli assi coordinati staccano sulla retta $y = x + 2$

b) tangenti agli assi coordinati e passanti per $A(4,\ 2)$.

Esercizio 3.16

Individuare gli insiemi dei punti del piano individuati della equazioni:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 30 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$

Esercizio 3.17

Determinare le tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ parallele alla bisettrice del secondo quadrante.

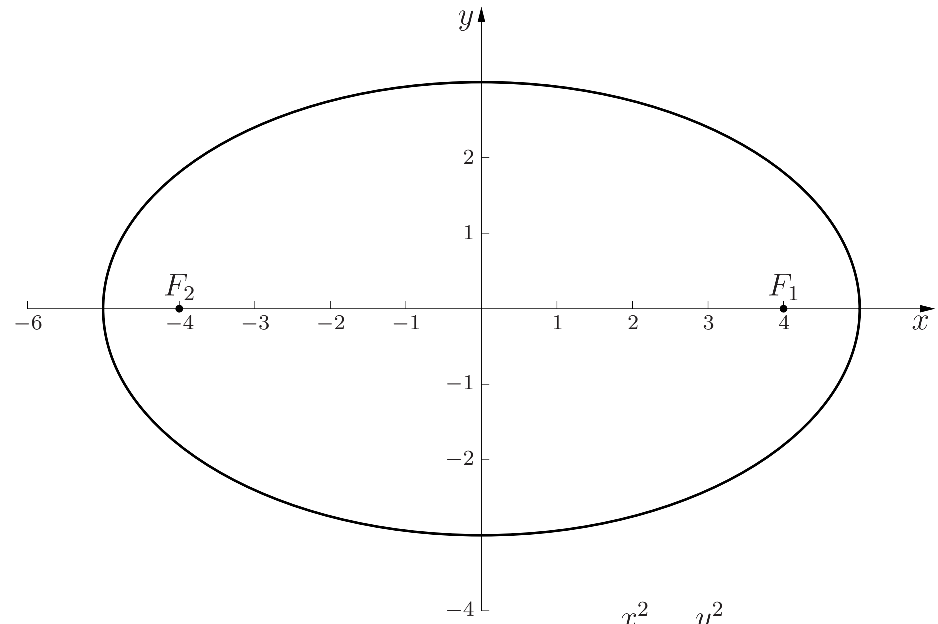

Figura 3.4: Ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Ellisse Si verifica non troppo difficilmente che l'insieme dei punti $P \equiv (x,\ y)$ del piano cartesiano tali che

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\ ,$$

ove $F_1 \equiv (c,\ 0)$ e $F_2 \equiv (-c,\ 0)$ (con $a > c > 0$) sono due punti assegnati (detti fuochi), è rappresentato da tutti e soli i punti che verificano l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ove si è posto $b^2 = a^2 - c^2$. Evidentemente si ha $a \geq b$; a è detto semiasse maggiore, b è detto semiasse minore.
Tale luogo di punti si dice ellisse e la sua rappresentazione sul piano cartesiano è mostrata in figura 3.4.
Se i fuochi stanno sull'asse delle y, allora sarà $b \geq a$.

Esercizio 3.18 Per un fuoco dell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{15} = 1$ condurre la perpendicolare all'asse maggiore. Determinare la distanza fra i fuochi e i punti in cui detta perpendicolare incontra l'ellisse.

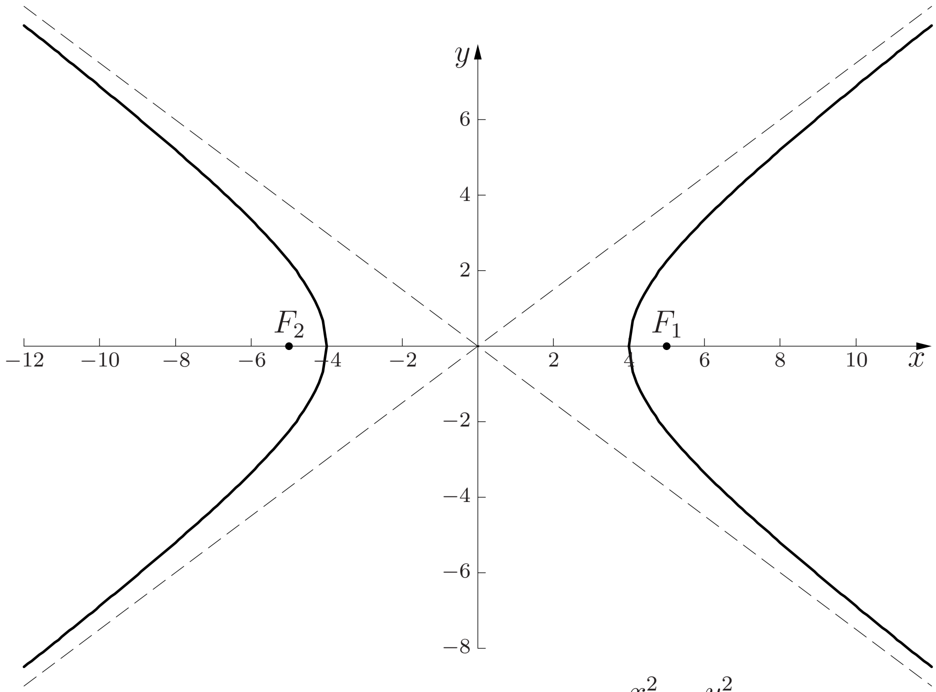

Figura 3.5: Iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Sempre senza troppa difficoltà si verifica che l'insieme dei punti $P \equiv (x,\ y)$ del piano cartesiano tali che **Iperbole**

$$|d(P,\ F_1) - d(P,\ F_2)| = 2a\ ,$$

ove $F_1 \equiv (c,\ 0)$ e $F_2 \equiv (-c,\ 0)$ (con $0 < a < c$) sono due punti assegnati è rappresentato da tutti e soli i punti che verificano l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1\ .$$

Tale luogo di punti si dice iperbole e la sua rappresentazione nel piano cartesiano è mostrata in figura 3.5.

Esercizio 3.19 Determinare i valori di q per cui la retta di equazione $y = \dfrac{5}{2}x + q$ e l'iperbole $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

a) si intersecano

b) sono tangenti

c) sono esterne.

Parabola Sia poi $F \equiv \left(0,\ \dfrac{q}{2}\right)$ e sia r la retta parallela all'asse x di equazione $y = -\dfrac{q}{2}$ (con $q > 0$). L'insieme dei punti $P \equiv (x,\ y)$ del piano cartesiano tali che

$$d(P,\ r) = d(P,\ F)$$

si dice parabola ed ha equazione

$$2qy = x^2\ .$$

Scriveremo, in genere questa equazione come

$$y = ax^2\ .$$

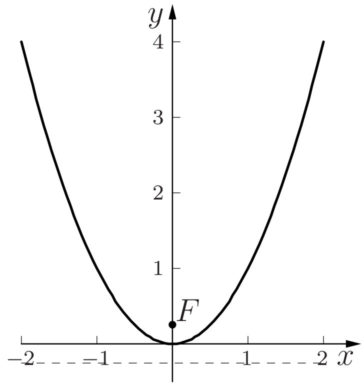

Figura 3.6: Parabola di equazione $y = x^2$

La sua rappresentazione nel piano cartesiano è mostrata in figura 3.6.

Esercizio 3.20 Scrivere l'equazione della parabola, luogo dei punti equidistanti da $F\left(\dfrac{q}{2},\ 0\right)$ e dalla retta di equazione $x = -\dfrac{q}{2}$.

Esercizio 3.21 Determinare la retta e il punto dai quali le seguenti parabole sono equidistanti:
a) $y = 2x^2$ b) $y = x^2$
c) $y = \frac{1}{2}x^2$.

Esercizio 3.22 Rappresentare graficamente le parabole di equazione
a) $y - 3 = 2(x - 1)^2$
b) $y - 1 = -3(x + 2)^2$.

Esercizi di riepilogo del capitolo 3

3.23 Determinare l'equazione della retta r passante per il punto $P = (2,\ 1)$ parallela alla retta s di equazione $y = 3x + 9$.

3.24 Determinare l'equazione della retta r passante per il punto $P = (2,\ 1)$ perpendicolare alla retta s di equazione $y = 2x + 3$.

3.25 Calcolare la distanza tra la retta r di equazione $y = 2x$ e il punto $P = (2,\ 2)$.

3.26 Calcolare la distanza tra la retta r di equazione $y = x + 3$ e la retta s di equazione $y = x$.

3.27 Determinare per quali valori del parametro reale β le rette r di equazione $y = 2x$ e la retta s di equazione $3x + \beta y + 5$ sono tra loro perpendicolari.

3.28 Determinare per quali valori del parametro reale γ le rette r di equazione $y = 2x$ e la retta s di equazione $3x + \gamma y + 7$ sono tra loro parallele.

3.29 Dati i punti $O = (0,\ 0)$ e $R = (0,\ 2)$, determinare l' equazione del luogo geometrico dei punti P tali che $d(P,\ O) = 2 \cdot d(P,\ R)$.

3.30 Determinare l'equazione della circonferenza di raggio $= 6$, avente il centro sulla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$ e tangente alla retta di equazione $y = 0$.

3.31 Determinare l'equazione della retta passante per i punti di intersezione delle due circonferenze di equazione $x^2 + y^2 = 25$ e $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$.

3.32 Data la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2$, determinare per quali valori del parametro reale q la retta $y = 2x + q$

- è esterna alla parabola;
- è tangente alla parabola;
- interseca la parabola in due punti distinti.

Capitolo 4

Funzioni

Funzione reale Useremo l'espressione funzione reale di variabile reale per indicare, dati $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (eventualmente coincidenti con $\mathbb{R}$ stesso), una qualunque legge f che ad ogni elemento x di $\mathcal{A}$ associa uno e un solo elemento $f(x)$ appartenente a $\mathcal{B}$, e questo si scrive come

$$\begin{aligned} f : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{B} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Pertanto quando si parla di funzione si intende:

- un insieme di partenza (detto "Dominio")
- un insieme di arrivo (detto "Codominio")
- una legge f che ad ogni elemento x di $\mathcal{A}$ associa uno e un solo elemento $f(x)$ appartenente a $\mathcal{B}$.

Grafico di una funzione Un'applicazione $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ determina un sottoinsieme $\mathcal{G}$ di $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ detto il grafico di f e definito nel modo seguente:

$$\mathcal{G} = \{(x,\ y) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} : y = f(x)\}\ .$$

Rappresentare il grafico di una funzione reale di variabile reale f consiste sostanzialmente nella seguente operazione: per ogni punto x appartenente al dominio di f determinare il valore $y = f(x)$ e segnare nel piano cartesiano il punto $(x,\ y)$. L'insieme di tutti questi punti è il grafico della funzione considerata.

Esercizio 4.1

Quali delle seguenti espressioni algebriche definiscono una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$? (si intende che a x resta associato un unico valore $f(x)$ tale che $y = f(x)$, ovvero che il sottoinsieme del piano cartesiano $\{(x, y) : y = f(x)\}$ rappresenta il grafico di $f(x)$).

a)	$y = x$	b)	$y = x^2$	c)	$y^2 = x$
d)	$y = \dfrac{1}{x}$	e)	$y = \sqrt{x}$	f)	$y = x^3$
g)	$y^3 = x$	h)	$y = \lvert x\rvert$	i)	$\lvert y\rvert = \lvert x\rvert$
j)	$\lvert y\rvert = x$	k)	$y = \mathrm{sen}(x)$	l)	$\mathrm{sen}(y) = x$
m)	$y = \mathrm{tg}(x)$	n)	$\mathrm{tg}(y) = x$	o)	$y = \sqrt{x^2}$

Immagine

Dato un sottoinsieme $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, si dice immagine di $\mathcal{E}$ il sottoinsieme di $\mathcal{B}$ definito da

$$\{b \in B : \exists x \in \mathcal{E} \ \text{ t.c. } \ f(x) = b\} \ \text{ che più brevemente si scriverà } \{f(x) : x \in \mathcal{E}\}$$

L'insieme $f(\mathcal{A})$ è detto l'immagine della funzione ed è chiaramente un sottoinsieme di $\mathcal{B}$. Occoree, in generale, fare attenzione tra il Codominio di una funzione e l'immagine della funzione.

Applicazione iniettiva, surgettiva e bigettiva

Sia data un'applicazione $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Si dice che f è iniettiva se elementi distinti di $\mathcal{A}$ hanno per immagine elementi distinti di $\mathcal{B}$; in simboli se

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \ .$$

La definizione di iniettività di una funzione $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ può essere data anche sotto la forma equivalente

$$f(a_1) = f(a_2) \ \Rightarrow \ a_1 = a_2 \ .$$

Si dice invece che f è surgettiva se ogni elemento di $\mathcal{B}$ è immagine di qualche elemento di $\mathcal{A}$; in simboli se

$$\forall b \in \mathcal{B} \ \exists a \in \mathcal{A} \text{ tale che } f(a) = b \ .$$

Si noti che f è surgettiva se e soltanto se $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Si dice poi che f è bigettiva se è sia iniettiva che surgettiva; in tal caso diremo anche che f è una bigezione.

Esercizio 4.2 Consideriamo le seguenti funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ (se non specificato in altro modo nel testo)

a)	$f(x) = x$	b)	$f(x) = x^2$
c)	$f(x) = x^3$	d)	$f(x) = \|x\|$
e)	$f(x) = \sqrt{x}$ (definita in $\mathbb{R}^+$)	f)	$f(x) = \sqrt[3]{x}$
g)	$f(x) = \dfrac{1}{x}$ (definita in $\mathbb{R}_*$)	h)	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (definita in $\mathbb{R}_*$)
i)	$f(x) = \operatorname{sen} x$	j)	$f(x) = 2^x$

Quali di queste sono iniettive? surgettive? bigettive?

Composizione di applicazioni Siano $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ due applicazioni. È allora definita un'applicazione da $\mathcal{A}$ in $\mathcal{C}$, detta applicazione composta di f e di g definita da

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \text{per ogni } a \in \mathcal{A}\ .$$

Esercizio 4.3 Date le seguenti coppie di funzioni f, g, determinare le funzioni ottenute dalla composizione $g \circ f$ e $f \circ g$

a)	$f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x + 1$	b)	$f(x) = x^2$; $g(x) = x + 1$
c)	$f(x) = \|x\|$; $g(x) = x - 1$	d)	$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = x + 1$
e)	$f(x) = x^2$; $g(x) = \operatorname{sen}(x)$		

Esercizio 4.4 Dimostrare che:

– se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sono iniettive anche $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ è iniettiva.
– se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sono surgettive anche $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ è surgettiva.
– se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ sono bigettive anche $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ è bigettiva.

Applicazione inversa Se $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è una bigezione esiste, univocamente determinata, un'applicazione $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tale che $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$. Tale applicazione si dice l'inversa di f e si indica con f^{-1}.

Esercizio 4.5 Dimostrare che le seguenti funzioni sono invertibili, e scrivere la funzione inversa

a) $f(x) = x^3 \qquad x \in \mathbb{R}$
b) $f(x) = 1/x \qquad x \in \mathbb{R}_*$

Il logaritmo come funzione inversa dell'esponenziale Come esempio di fondamentale importanza relativo alla nozione di funzione inversa vale la pena di richiamare il concetto di logaritmo, già espresso nel Capitolo 1. Infatti, fissato $b > 0$, $b \neq 1$, la funzione esponenziale

$$\begin{aligned} \exp_b : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+_* \\ x &\mapsto b^x \end{aligned}$$

è una funzione bigettiva, pertanto ammette la funzione inversa, da $\mathbb{R}^+_*$ a $\mathbb{R}$. Tale funzione inversa, non è nient'altro che il "logaritmo in base b"

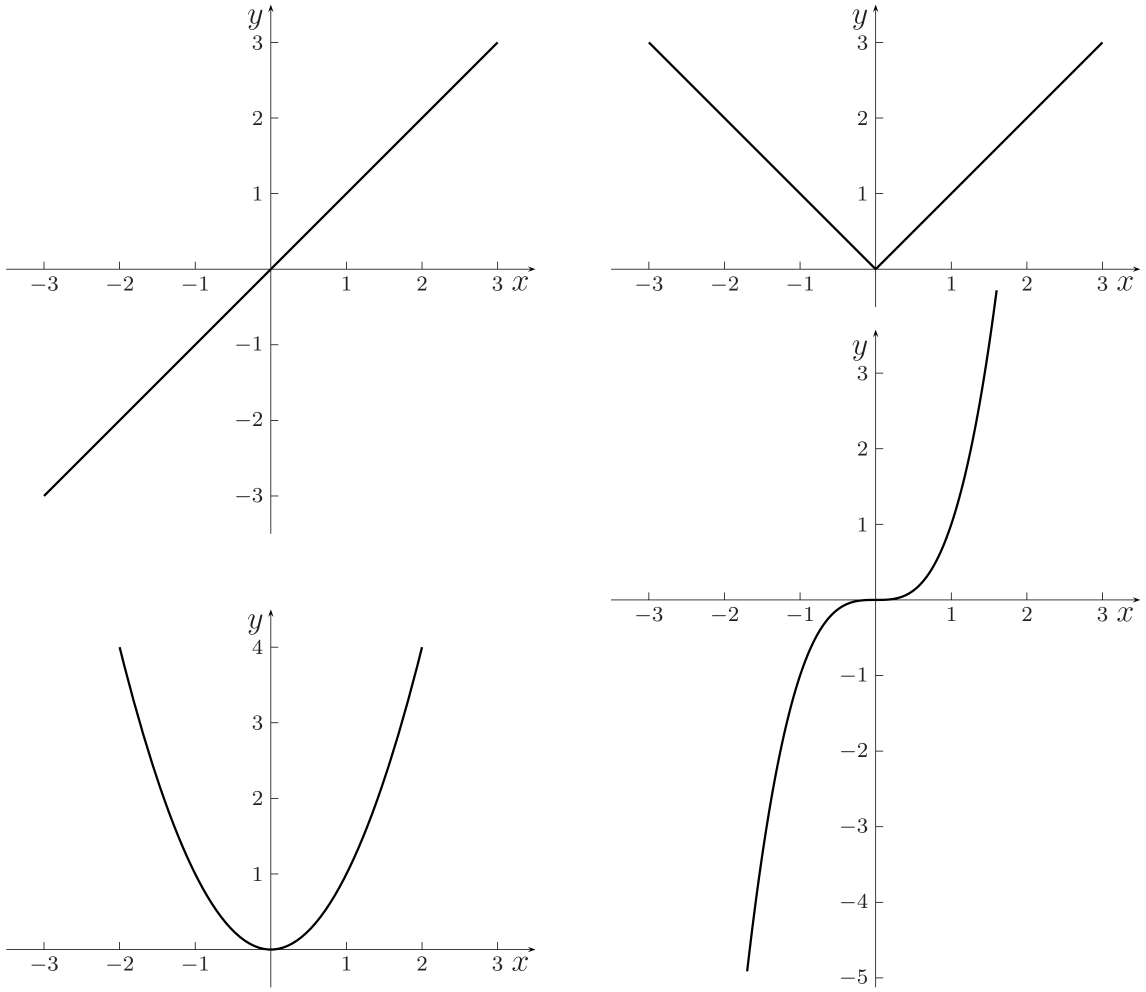

Figura 4.1: Grafici delle funzioni $f(x) = x$, $f(x) = |x|$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$.

$$\begin{array}{rcl} \log_b : \mathbb{R}^+_* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log_b(x) \end{array}$$

Si noti che, essendo $\log_b(x)$ la funzione inversa della funzione b^x, allora, essenzialmente per definizione, si ha

$$b^{\log_b(x)} = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+_* \ ,$$

$$\log_b(b^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

Esempi di grafici di funzioni

Per riuscire a capire il comportamento di una funzione di variabile reale, come tutti ben sanno, è di fondamentale importanza riuscire a tracciarne il relativo grafico. A tale scopo mostriamo rapidamente in figura 4.1 i grafici di alcune funzioni che abbiamo considerato nel Capitolo 1.

Esercizio 4.6 Rappresentare, nel piano cartesiano, le funzioni

a) $f(x) = \begin{cases} x+3 \text{ per } x \geq 1 \\ \dfrac{x^2}{3} + 1 \text{ per } x < 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \sqrt{|x| - 1}$

c) $f(x) = |x^2 - |x||$ d) $f(x) = \sqrt{|x-1|}$

Funzione potenza La potenza, che abbiamo definito nel capitolo 1, fornisce un certo numero di funzioni; in particolare se teniamo fisso l'esponente otteniamo una funzione

$$f(x) = x^a ,$$

definita su $(0,\ \infty)$ se $a < 0$ e definita su $[0,\ \infty)$ se $a > 0$ che si chiama funzione potenza.

I grafici qualitativi della funzione potenza sono rappresentati nelle figure 4.2.

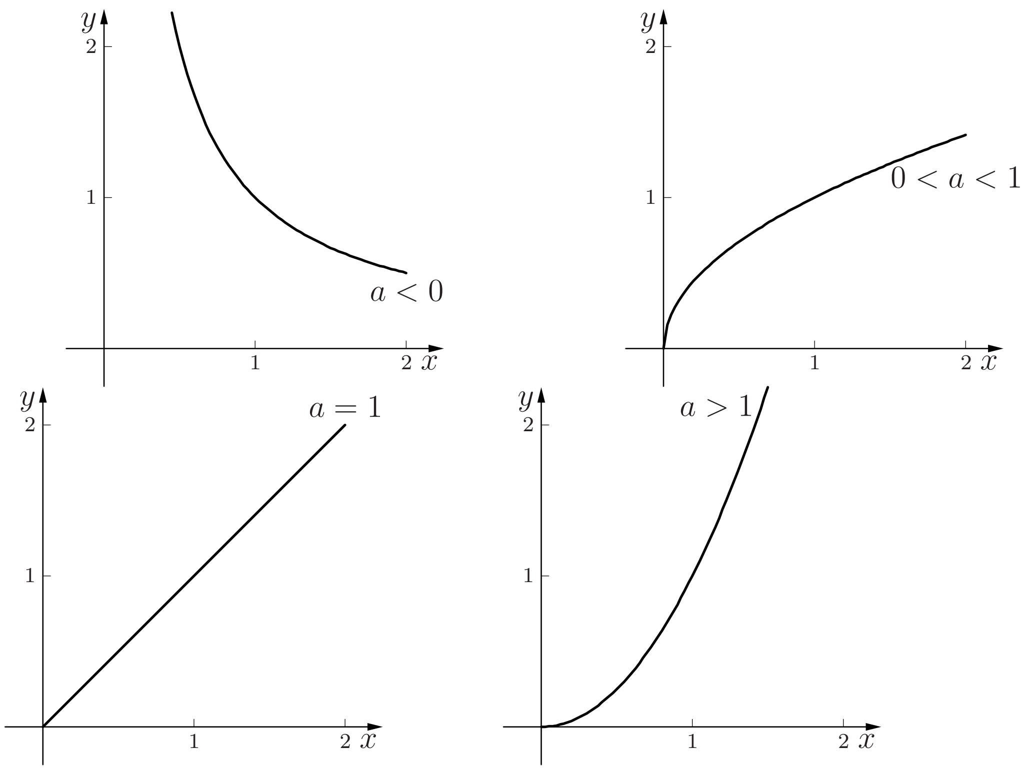

Figura 4.2: Grafici di $f(x) = x^a$ al variare di a

Esercizio 4.7 Disegnare per punti e confrontare fra loro i grafici delle funzioni $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x$, $f(x) = x^{-1}$, $f(x) = x^{-2}$, $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$.

Esponenziale Se teniamo fissa la base b (n.b. $b > 0$!) e facciamo variare l'esponente, la potenza che abbiamo definito nel Capitolo 1 ci consente di ottenere la funzione b^x , definita su $\mathbb{R}$, che prende il nome di funzione esponenziale. L'esponenziale è una funzione iniettiva se $b \neq 1$. I grafici qualitativi della funzione esponenziale sono presentati in figura 4.3.

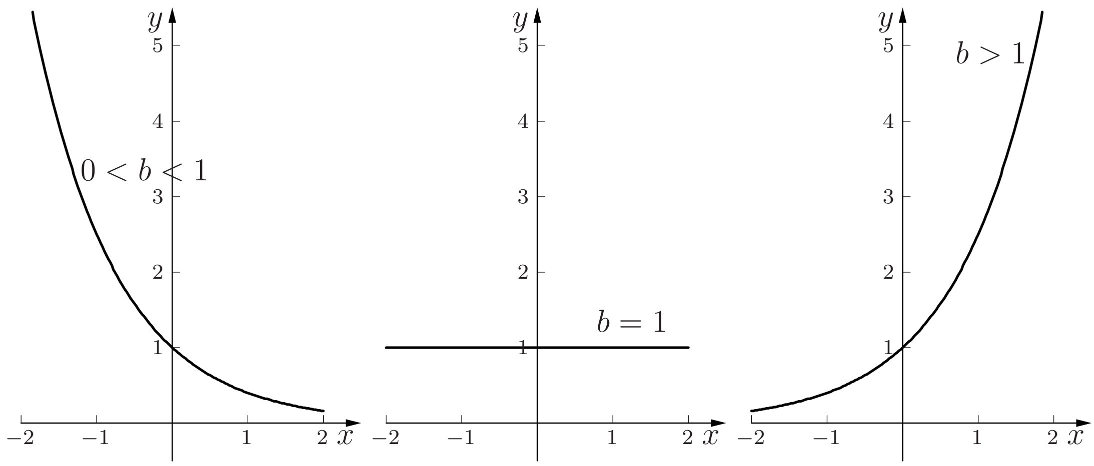

Figura 4.3: Grafico di b^x al variare di b.

Numero di Nepero

Particolarmente utile per l'uso in analisi matematica come base della funzione esponenziale è il numero di Nepero "e" che vale circa 2,71. È possibile disegnare qualitativamente, ma con una certa precisione, il grafico della funzione e^x che risulta essere quello esposto nella figura 4.4.

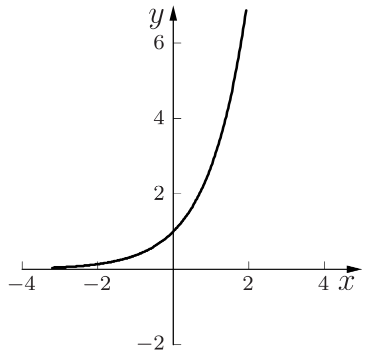

Figura 4.4: Grafico della funzione e^x

Grafico della funzione inversa

Si ricorda che se una funzione è sia iniettiva che surgettiva, è bigettiva quindi si può scrivere la funzione inversa. Ad esempio la funzione $f(x) = x^2$ con $x \in \mathbb{R}^+$ è strettamente crescente, quindi iniettiva, e anche surgettiva su $\mathbb{R}^+$; è allora biunivoca. La sua funzione inversa $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ si scriverà $x = \sqrt{y}$ se con y si indica la variabile indipendente ed il suo grafico coincide con quello di f essendo mutata l'interpretazione che si dà alle variabili riportate sugli assi coordinati. Se invece ci si uniforma alla consuetudine di indicare con x la variabile indipendente, la funzione inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ed il suo grafico si ottiene da quello di f mediante una simmetria rispetto alla retta $y = x$. Vedi figura 4.5.

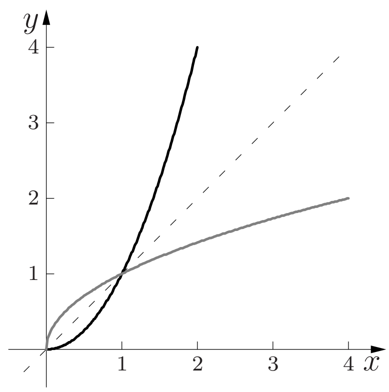

Figura 4.5: Grafici di $f(x)$ e $f^{-1}(x)$.

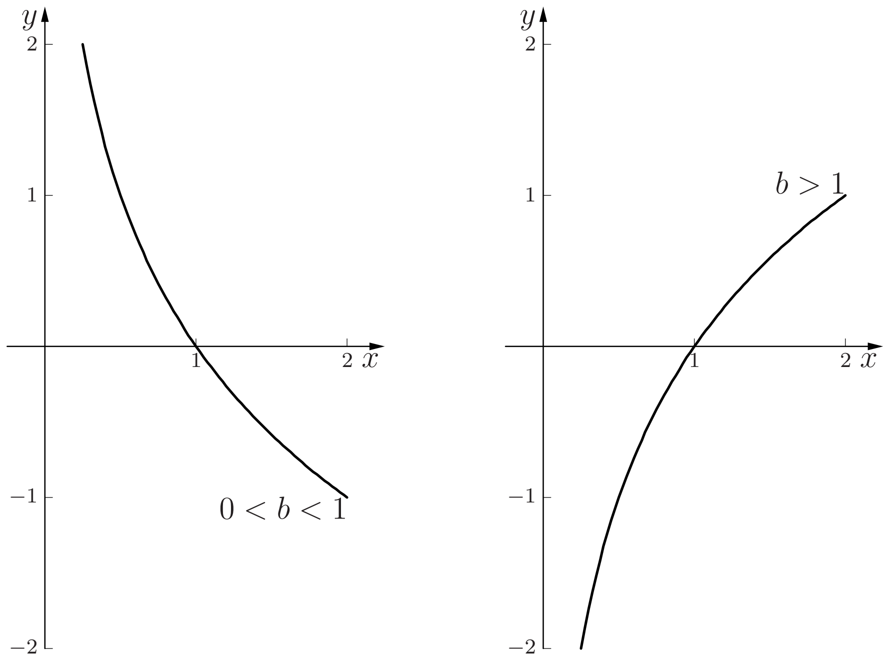

Figura 4.6: Grafico di $\log_b(x)$ al variare di b

Analogamente, considerando il simmetrico del grafico delle funzioni b^x rispetto alla bisettrice del 1º e 3º quadrante, otteniamo il grafico della funzione $\log_b(x)$, mostrato nella figura 4.6.

Logaritmi naturali Quando in un logaritmo non si specifica la base, è convenuto che sia $b = \mathrm{e}$. I logaritmi in base "e" vengono spesso chiamati "logaritmi naturali"; risulterà chiaro successivamente nei corsi di analisi matematica il perché di questa "naturalità". La figura 4.7 mostra il grafico del logaritmo naturale, ottenuto mediante la simmetria rispetto alla bisettrice del 1º e 3º quadrante del grafico della funzione e^x.

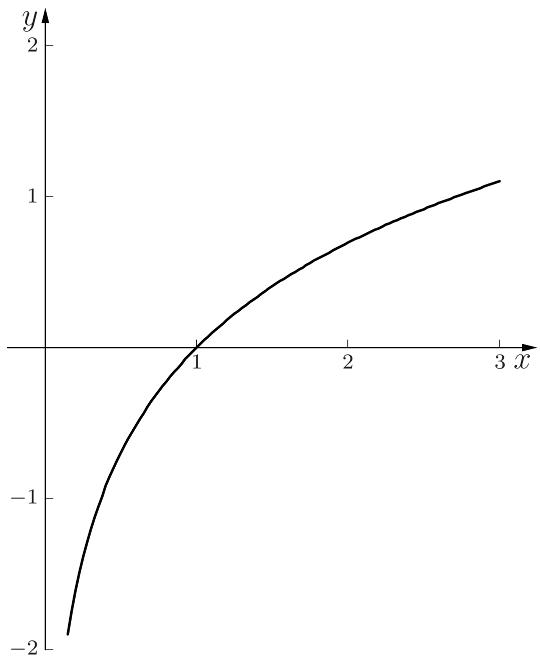

Figura 4.7: Grafico della funzione $y = \log(x)$

Esercizi di riepilogo del capitolo 4

4.8 Individuare il dominio delle seguenti funzioni:
a) $\log[(x-1)(x+2)]$ b) $\log(x^3-8)$
c) $f(x) = \log(x-2)^3$ d) $f(x) = \log \dfrac{x+2}{|x|}$

4.9 Date le seguenti funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$ e $g(x) = 2 \cdot x + 1$ determinare $f \circ g$ e $g \circ f$.

4.10 Disegnare il grafico delle funzioni

$f(x) = x - |x|$ $\qquad$ $f(x) = x + |x|$ $\qquad$ $f(x) = x + |x-1|$

4.11 Dire se le seguenti funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono iniettive e/o surgettive:

funzione	Iniettiva	Surgettiva
$f(x) = 2x - 5$		
$f(x) = x^2$		
$f(x) = x^3$		
$f(x) = x^2 + 4x + 4$		
$f(x) = x^3 - x^2$		
$f(x) = 2^x$		
$f(x) = \|x^8 - 8\|$		
$f(x) = \|x - 8\|$		

4.12 Date le seguenti funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \cdot \log_2 x$, $g(x) = x^3 + 5$ e $h(x) = |x|$, determinare $(f \circ g \circ h)(x)$.

4.13 Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \cdot x + 5$, dimostrare che f è bigettiva e determinare la funzione inversa di f.

4.14 Quante sono le soluzioni dell' equazione $2^x = \operatorname{sen} x$?

4.15 Sia $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$. Si determini il numero di tutte le funzioni bigettive $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

4.16 Siano $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Si determini il numero di tutte le funzioni iniettive $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Capitolo 5

Polinomi

Definizione di polinomio Si dice polinomio a coefficienti reali nella indeterminata x ogni espressione del tipo

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

ove gli a_i sono numeri reali, e a_0 si dice il termine costante del polinomio.

L'insieme di tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$ verrà indicato con $\mathbb{R}[x]$.

Grado di un polinomio Dato un polinomio non nullo, il più grande intero i tale che a_i è diverso da 0 si dice il grado del polinomio.

Somma fra polinomi Nell'insieme dei polinomi si introduce l'operazione di somma; se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ ,$$

$$Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \ ,$$

si definisce (supponendo ad esempio $n \geq m$)

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \ ,$$

ove si è posto $b_i = 0$ per $m < i \leq n$.

Esercizio 5.1 Eseguire le seguenti somme:

a) $(6x^2 + \sqrt{2}x + 3) + (x^3 + \frac{1}{2}x + 2)$

b) $(6x^2 + \sqrt{2}x + 3) + (x^2 + \frac{1}{2}x + 2)$

c) $(6x^2 + \sqrt{2}x + 3) + (-6x^2 + \frac{1}{2}x + 2)$

Prodotto fra polinomi Si introduce anche l'operazione di prodotto nel modo seguente:

1. il prodotto di due monomi ax^n e bx^m è il monomio $(ab)x^{n+m}$;

2. per moltiplicare tra loro due polinomi si moltiplicano a due a due i rispettivi monomi e poi si sommano fra loro i monomi ottenuti.

Eseguire i seguenti prodotti: **Esercizio 5.2**

a) $(6x^4 + \sqrt{3}x^2 + \pi x + 2) \cdot (x^3 - 3x + 8)$

b) $(4x^3 + x + 3) \cdot (8x^4 + 6x^2 + 1)$

c) $(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)$

Cosa notate riguardo al grado dei polinomi ottenuti?

Esercizio 5.3

Calcolare $\left(\left((a_4 x + a_3) \cdot x + a_2\right) \cdot x + a_1\right) \cdot x + a_0$ e generalizzare il risultato ottenuto in modo da ottenere una formula valida per un generico polinomio di grado n.

Prodotto di un polinomio per una costante

Si definisce anche il prodotto di un polinomio per una costante:

$$c \cdot (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = c a_n x^n + c a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c a_1 x + c a_0 \ .$$

Moltiplicare un polinomio per una costante è dunque equivalente a moltiplicarlo per il polinomio di grado zero, il cui unico termine è quello costante.

Legge di annullamento del prodotto

Dalla definizione precedente segue subito che il prodotto di due polinomi è il polinomio nullo (0) se, e solo se, almeno uno dei due polinomi è il polinomio nullo.

Proprietà del grado

Il grado è legato alle operazioni precedenti dalle seguenti proprietà:

$$\mathrm{gr}(P(x) + Q(x)) \leq \max(\mathrm{gr}(P(x)), \mathrm{gr}(Q(x))) \ ,$$

$$\mathrm{gr}(P(x) \cdot Q(x)) = \mathrm{gr}(P(x)) + \mathrm{gr}(Q(x)) \ .$$

Cosa si può dire di più nel caso della somma?

Esercizio 5.4

Dimostrare che se un polinomio $P(x)$ è invertibile, cioè esiste un altro polinomio $Q(x)$ tale che $P(x) \cdot Q(x) = 1$, $P(x)$ deve essere di grado zero.

Principio di identità dei polinomi

Due polinomi sono uguali se e solo se hanno gli stessi coefficienti.

Di particolare utilità per determinare certi polinomi e capirne certe proprietà è il concetto di *Interpolazione polinomiale*.

Interpolazione polinomiale

Per individuare il polinomio $P(x)$ di grado n è sufficiente conoscere i valori assunti dalla funzione polinomiale associata per $n + 1$ distinti valori di x.

Esempio 5.1

Il polinomio $P(x)$ di 2° grado che per $x = 1,\ 3,\ 4$ assume i valori $3,\ 7,\ 12$, si trova imponendo che

$$\begin{cases} a_2 + a_1 + a_0 = 3 \\ a_2 \cdot 9 + a_1 \cdot 3 + a_0 = 7 \\ a_2 \cdot 16 + a_1 \cdot 4 + a_0 = 12 \end{cases}$$

da cui si ricava $P(x) = x^2 - 2x + 4$.

Esercizio 5.5 Calcolare il polinomio di 3° grado tale che per $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ assume i valori $-1,\ 2,\ 3,\ -4$.
Calcolare il polinomio di 4° grado tale che per $x = 0,\ 1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$ assume i valori $0,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{16}$.

Teorema Dati due polinomi $P(x)$ e $D(x)$ (con $D(x) \neq 0$) esistono, e sono unici, due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x) \ ,$$

ed inoltre

$$\mathrm{gr}(R(x)) < \mathrm{gr}(D(x)) \ .$$

In analogia a quanto succede nell'ambito dei numeri interi positivi, $Q(x)$ e $R(x)$ si dicono il quoto (o quoziente) e il resto della divisione di $P(x)$ per $D(x)$.

Divisione fra polinomi Vediamo ora con un esempio pratico come si effettua la divisione tra polinomi.
Supponiamo ad esempio di voler dividere il polinomio $x^5 + 3x^4 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ per il polinomio $x^2 + x - 2$.
Scriviamo la seguente tabella:

$$\begin{array}{cccccc|c}
x^5 & +3x^4 & & -\frac{9}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +1 & x^2+x-2 \\ \cline{7-7}
 & & & & & &
\end{array}$$

x^5 diviso per x^2 dà x^3: scriviamo pertanto x^3 nella parte riservata al quoto, come nella divisione ordinaria, e scriviamo nella riga sotto al dividendo, mantenendo l'ordine, il prodotto di x^3 per il divisore, cambiato di segno. Tracciamo una riga, sommiamo e otteniamo infine

$$\begin{array}{cccccc|c}
x^5 & +3x^4 & & -\frac{9}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +1 & x^2+x-2 \\ \cline{7-7}
-x^5 & -x^4 & +2x^3 & & & & x^3 \\ \cline{1-6}
= & +2x^4 & +2x^3 & -\frac{9}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +1 &
\end{array}$$

A questo punto si ripete l'operazione precedente. Poiché $2x^4$ diviso per x^2 dà $2x^2$, si scrive $+2x^2$ di fianco a x^3 (quoto) e si moltiplica $2x^2$ per $x^2 + x - 2$. Si scrive il risultato cambiato di segno nella riga inferiore e, sommando, si ottiene:

$$\begin{array}{cccccc|c}
x^5 & +3x^4 & & -\frac{9}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +1 & x^2+x-2 \\ \cline{7-7}
-x^5 & -x^4 & +2x^3 & & & & x^3+2x^2 \\ \cline{1-6}
= & +2x^4 & +2x^3 & -\frac{9}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +1 & \\
 & -2x^4 & -2x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-6}
 & = & = & -\frac{1}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +1 &
\end{array}$$

Così procedendo si ottiene:

$$
\begin{array}{cccccc|l}
x^5 & +3x^4 & & -\frac{9}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +1 & x^2+x-2 \\ \cline{7-7}
-x^5 & -x^4 & +2x^3 & & & & x^3+2x^2-\frac{1}{2} \\ \cline{1-6}
= & +2x^4 & +2x^3 & -\frac{9}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +1 & \\
 & -2x^4 & -2x^3 & +4x^2 & & & \\ \cline{2-6}
 & = & = & -\frac{1}{2}x^2 & -\frac{3}{2}x & +1 & \\
 & & & +\frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{2}x & -1 & \\ \cline{4-6}
 & & & = & -x & = &
\end{array}
$$

Poiché $-x$ ha grado minore di x^2+x-2, il procedimento è finito; abbiamo dunque trovato che il quoto è $x^3+2x^2-\dfrac{1}{2}$ e il resto è $-x$.

Esercizio 5.6

Eseguire le seguenti divisioni:

a) $(x^2+2x+1):(x+1)$

b) $(x^2+2x+\sqrt{2}):(x+1)$

c) $(x^7+x^5+85x^3+\sqrt{3}x^2+\mathrm{e}):(2x^3+x)$

d) $(x^5+\sqrt{3}x^4-\sqrt{5}x):(x^6+6x^4+1996x^2)$

e) $(x^7+a^7):(x+a)$

f) $(x^7-a^7):(x-a)$

g) $x^7:(x-a)$

Dalla divisione dei polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ segue immediatamente la scomposizione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\ ,$$

che è spesso utile.

Esercizio 5.7

Scomporre le seguenti frazioni:

$$\frac{x^4}{x^2+1} \qquad \frac{2x^2-x-1}{2x-3} \qquad \frac{4x^3+3x^2+100}{x^2+4x+13}\ .$$

Fattorizzazione di un polinomio

Diremo, analogamente a quanto si fa per gli interi, che $P(x)$ è divisibile per $D(x)$ se il resto della divisione di $P(x)$ per $D(x)$ è 0, ovvero se esiste $Q(x)$ tale che $P(x)=Q(x)\cdot D(x)$. Il polinomio $P(x)$ è scomposto nei fattori $Q(x)$ e $D(x)$.

Prodotti notevoli

Il problema della scomposizione in fattori di un polinomio è di tale rilevanza che alcuni casi (prodotti notevoli) possono essere utilmente memorizzati:

$x^2 - a^2 = (x+a)\cdot(x-a);$
$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2;$
$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2;$
$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3;$
$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 = (x-a)^3;$
$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1});$
$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + \cdots - a^{n-2}x + a^{n-1})$ per n dispari;

Esempio 5.2 Per ottenere la scomposizione in fattori a volte è utile procedere per gradi, come nell'esempio

$$\begin{aligned} 8x^7 + x^4 - 8x^3 - 1 &= x^4(8x^3+1) - (8x^3+1) = (8x^3+1)(x^4-1) = \\ &= (2x+1)(4x^2-2x+1)(x-1)(x+1)(x^2+1) \end{aligned}$$

oppure individuando opportuni termini da aggiungere e sottrarre al polinomio dato, come nell'esempio

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = \\ &= (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x)\ . \end{aligned}$$

Polinomio irriducibile Diremo irriducibile (in campo reale) ogni polinomio $P(x)$ che ammette solo divisori banali, che cioè sia divisibile solo per le costanti e per i suoi prodotti per le costanti.

Per quanto riguarda l'insieme $\mathbb{R}[x]$ costituito da tutti polinomi i cui coefficienti sono numeri reali, si ha:

$$P(x) \text{ è irriducibile} \Longleftrightarrow \begin{cases} gr(P(x)) = 1, \\ gr(P(x)) = 2, \text{ e } \ \Delta(P(x)) < 0 \end{cases}$$

(dove se $P(x) = ax^2 + bx + c$ si ha $\Delta(P(x)) = b^2 - 4ac$).

Fattorizzazione dei polinomi È possibile mostrare che, se il prodotto di due polinomi è divisibile per un polinomio irriducibile, almeno uno di essi lo è.
Si può dimostrare inoltre che ogni polinomio può essere scomposto nel prodotto di fattori irriducibili e, basandosi sull'enunciato precedente e procedendo per induzione sul numero dei fattori, che due di tali scomposizioni sono sostanzialmente uguali, nel senso che i fattori di due diverse scomposizioni possono differire solamente per costanti moltiplicative e per il loro differente ordinamento. Ad esempio, il polinomio $2x^2 + 2x$ è scomponibile nei fattori $2x$ e $x+1$ oppure x e $2x+2$.

Esercizio 5.8

Scomporre in fattori irriducibili i seguenti polinomi:

a) $x^6 + x^3 - 2$ b) $x^4 + 5x^2 + 4$

c) $x^3 + 2x^2 - 10x + 7$ d) $x^3 + 3x^2 + 3x - 7$

e) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$ f) $x^6 - 1$

Radici di un polinomio

Un numero α si dice radice del polinomio $P(x)$ se $P(\alpha) = 0$. Il concetto di fattorizzazione e quello di radice di un polinomio sono intimamente legati, come dimostra il ben noto Teorema di Ruffini:

Teorema di Ruffini

Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $P(x)$ sia divisibile per $(x - c)$ è che si annulli per $x = c$.
La dimostrazione della necessità è ovvia.
Vediamo la sufficienza. Dividendo $P(x)$ per $(x - c)$ si ottiene

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - c) + R \ ,$$

dove R è un polinomio di grado zero, cioè una costante. Da $P(c) = 0$ si ricava $R = 0$.

Regola di Ruffini

Dato un polinomio $P(x)$, $P(c)$ è il resto della divisione di $P(x)$ per $(x-c)$. Conseguenza di questo corollario è la regola pratica per dividere un polinomio $P(x)$ per un monomio del tipo $(x - c)$.
Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$; si costruisce la seguente tabella:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
c		$a_n c$	$(a_{n-1}c + a_n c^2)$	$\cdots$	$(a_2 c + \cdots + a_n c^{n-1})$	$a_1 c + a_2^2 c + \cdots + a_n^n c$
	a_n	$(a_{n-1} + a_n c)$	$(a_{n-2} + a_{n-1}c + a_n c^2)$	$\cdots$	$(a_1 + a_2 c + \cdots + a_n c^{n-1})$	$P(c)$

L'algoritmo è il seguente. Nella prima riga si scrivono i coefficienti del polinomio, scrivendo il termine noto al di là della barra. Si lascia una riga in bianco e si traccia una riga orizzontale. Sopra questa riga ed a sinistra della barra verticale si scrive il numero c.
Sotto la riga orizzontale si scrive il primo coefficiente a_n. Lo si moltiplica per c e si scrive il risultato sopra la riga ed incolonnato con il coefficiente a_{n-1}. Si esegue la somma nella colonna e si scrive il risultato sotto la riga. Si itera il procedimento moltiplicando il risultato per c, e così via.
Sotto l'ultima colonna si ottiene $P(c)$, i numeri presenti sotto la riga, da sinistra verso destra, sono i coefficienti del quoto a partire dalla potenza $(n - 1)$ a scalare.

Esercizio 5.9 Calcolare, per i seguenti polinomi, il resto della divisione per $(x-2)$ senza eseguire l'operazione.

a) $x^3 + 2x^2 - 10x + 5$

b) $x^6 - 2x^5 - 10$

c) $-x^4 + x^3 + 3x + 2$

Esercizio 5.10 Eseguire le seguenti divisioni:

a) $(x^5 + a^5) : (x + a)$

b) $(x^6 - a^6) : (x^2 - a^2)$

c) $(x^5 - a^5) : (x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$

M.C.D. e m.c.m. fra polinomi Il massimo comun divisore (M.C.D.) fra due polinomi è il polinomio di massimo grado divisore comune dei due polinomi dati, ed è definito a meno di una costante moltiplicativa. In analogia con i naturali è definito il minimo comune multiplo (m.c.m.).

Esercizio 5.11 Calcolare M.C.D. e m.c.m. dei seguenti polinomi:

$x^3 - 1$ e $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$

$2x^2 - 3$ e $\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$.

Esercizi di riepilogo del capitolo 5

5.12 Determinare il numero di radici reali delle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
&x^2 - 5x + 6 = 0 \\
&x^2 - 5x^2 + 6x = 0 \\
&x^2 - 2x + 1 = 0 \\
&x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \\
&x^2 - 2754x + 1 = 0 \\
&x^2 + x + 5 = 0 \\
&x^4 + 2004 = 0
\end{aligned}$$

5.13 Risolvere le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
&x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \\
&6x^3 - 5x^2 - 2x + 1 = 0 \\
&x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \\
&x^8 - 6x^4 - 7 = 0
\end{aligned}$$

5.14 Dati i polinomi $p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$ e $q(x) = x - 1$, calcolare $p(x) : q(x)$.

5.15 Dati i polinomi $p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + 1$ e $q(x) = x^2 + 1$, determinare il quoziente e il resto della divisione $p(x) : q(x)$.

5.16 Se $p(x)$ è divisibile per $x^2 - 3$ allora $\sqrt{3}$ è radice di $p(x)$?

5.17 Un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali di grado 5, può avere 6 radici distinte ?

5.18 Un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali di grado 5, può avere un'unica radice reale ?

Capitolo 6

Trigonometria

Angolo orientato

Nel capitolo 2 abbiamo visto che la misura data di un angolo è una misura assoluta ed è quindi un numero non negativo. È però utile introdurre angoli orientati. Due semirette orientate individuano due angoli: uno è quello già preso in considerazione, l'altro è il suo complementare insiemistico a cui si aggiungono i lati. Definiremo *angolo orientato* l'insieme costituito da una coppia ordinata di semirette aventi la stessa origine ed un "verso di rotazione". Ad un angolo orientato resta associato l'angolo costituito dai punti del piano "spazzati" dal primo lato per sovrapporsi al secondo. La misura di un angolo orientato sarà positiva se il verso di percorrenza è quello antiorario, sarà negativo se il verso di percorrenza è quello orario. Il valore assoluto della misura dell'angolo orientato è la misura dell'angolo non orientato associato.

Angoli maggiori di un angolo giro

In special modo nei corsi di analisi si incontrano angoli orientati aventi misura maggiore di 2π o minore di -2π. Cosa vuol dire? Bisogna immaginare di avere infiniti piani cartesiani sovrapposti aventi la stessa origine e gli stessi assi. Se uno dei lati dell'angolo coincide col semiasse positivo delle x, ruotando l'altro in senso antiorario od orario, ogni volta che esso attraversa il semiasse positivo delle x si passa rispettivamente al piano successivo o al precedente. Si può pensare a questi infiniti piani come alla superficie di una scala a chiocciola con infiniti pianerottoli e compressa in un unico piano.

L'ambiente in cui ci muoviamo è un piano cartesiano, anzi gli infiniti piani cartesiani appena introdotti. Ad un punto P distinto dall'origine O associamo la semiretta r_P con origine in O e passante per P. Al punto P restano associati due numeri: la distanza di P da O che si indica generalmente con la lettera ρ e la misura dell'angolo orientato avente come primo lato il semiasse delle x positive e come secondo lato la semiretta r.

Vediamo che ci sono molte ambiguità. Quale orientamento prendiamo? Su quale degli infiniti piani ci fermiamo? Per fissare le idee chiamiamo ϑ il primo angolo che otteniamo ruotando in verso orario. Sarà allora $0 \le \vartheta < 2\pi$. Altre misure di angoli associati saranno, continuando a ruotare in senso antiorario, $\vartheta + 2n\pi$ dove $n \in \mathbb{N}$. Ruotando in senso orario avremo degli angoli a misura negativa che avranno valore $\vartheta - 2n\pi$ dove $n \in \mathbb{N}$. In definitiva, al punto P restano associati infiniti angoli orientati aventi misura $\vartheta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Due sono le scelte più comuni per associare a P un solo angolo. Una è quella già indicata per cui risulta $0 \le \vartheta < 2\pi$. L'altra è di scegliere il verso di percorrenza antiorario se P sta nel primo o nel secondo quadrante, e di scegliere il verso orario se P sta nel terzo o nel quarto quadrante. In tal caso risulta $-\pi < \vartheta \le \pi$.

Funzioni trigonometriche

Dato un punto P, non coincidente con l'origine, di coordinate $(x,\ y)$, definendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ed indicando con ϑ uno qualunque degli angoli orientati aventi come primo lato il semiasse positivo delle x e come secondo lato la semiretta r_P, definiamo

$$\cos(\vartheta) = \frac{x}{\rho} \qquad \operatorname{sen}(\vartheta) = \frac{y}{\rho}\ . \tag{6.1}$$

La prima funzione si chiama *coseno* di ϑ, la seconda funzione si chiama *seno* di ϑ.

Circonferenza trigonometrica

Per semplificarci la vita possiamo scegliere il punto P sulla circonferenza con centro l'origine e raggio 1; in tal caso risulterà sempre $\rho = 1$ e le funzioni $\cos(\vartheta)$ e $\operatorname{sen}(\vartheta)$ risulteranno semplicemente essere le coordinate di P. Tale circonferenza sarà chiamata *circonferenza trigonometrica* e verrà indicata con $\mathbb{T}$.

Codominio delle funzioni trigonometriche

Dalle definizioni, poiché $|x| \le \rho$ e $|y| \le \rho$, risulta

$$\begin{cases} -1 \le \cos(\vartheta) \le 1 \\ -1 \le \operatorname{sen}(\vartheta) \le 1 \end{cases} \qquad \forall \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Relazione trigonometrica fondamentale

Dalla definizione otteniamo anche

$$\cos^2(\vartheta) + \operatorname{sen}^2(\vartheta) = 1 \quad \forall\ \vartheta \in \mathbb{R}\ .$$

Le notazioni $\cos^2(\vartheta)$ e $\operatorname{sen}^2(\vartheta)$ sono invalse nell'uso comune in luogo di quelle più precise $(\cos(\vartheta))^2$ e $(\operatorname{sen}(\vartheta))^2$.

Esercizio 6.1

Determinare, senza usare la calcolatrice, il valore di

a) $\operatorname{sen}(\alpha)$ se è $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$ e $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$

b) $\cos(\alpha)$ se è $\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{1}{4}$ e $0 \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$

Esercizio 6.2

Dopo aver calcolato il seno e il coseno dell'angolo $\pi/6$, ricavare da questi seno e coseno degli angoli $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}$

Tangente trigonometrica Consideriamo la circonferenza $\mathbb{T}$ (vedi figura 6.1) e tracciamo la retta tangente in U, punto di intersezione con il semiasse delle x positive; la semiretta r_P interseca tale tangente in un punto Q se P appartiene al primo o quarto quadrante. Se P appartiene al secondo o terzo quadrante è il prolungamento della semiretta che interseca la tangente in Q. L'ovvia similitudine dei triangoli OPH e OQU fornisce

$$\frac{\overline{QU}}{\overline{PH}} = \frac{\overline{OU}}{\overline{OH}} \ ,$$

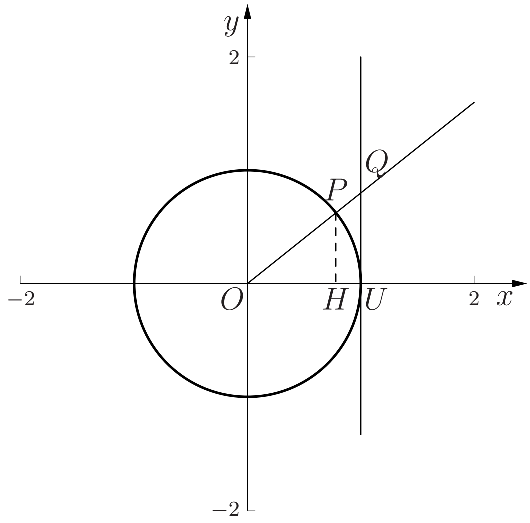

Figura 6.1: Circonferenza trigonometrica.

che implica

$$\overline{QU} = \frac{\operatorname{sen}(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} \ .$$

Se la semiretta r_P è parallela all'asse delle y il punto Q non esiste. Notiamo inoltre che un punto P della circonferenza trigonometrica ed il punto diametralmente opposto P' individuano lo stesso punto Q.

Quanto esposto graficamente e la relativa dimostrazione valgono se P e Q stanno nel primo quadrante. Lo studente può completare per esercizio la casistica ad una posizione arbitraria di P.

Il punto Q resta definito, quindi, se P non è il punto $(0,\ 1)$ o il punto $(0,\ -1)$. Inoltre, facendo variare P su $\mathbb{T}$, Q riassume la stessa posizione ogni qual volta P percorre un arco lungo π, una semicirconferenza. Abbiamo quindi una nuova funzione reale di variabile reale che al punto P associa l'ordinata di Q. Questa funzione prende il nome di *tangente di* ϑ, e si indica con $\operatorname{tg}(\vartheta)$. Per quanto visto, questa funzione può essere espressa in funzione delle precedenti

$$\operatorname{tg}(\vartheta) = \frac{\operatorname{sen}(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} \ .$$

Il dominio di definizione della funzione tangente è $\mathcal{A} = \mathbb{R} \setminus \{x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 6.3 Ricavare le rimanenti funzioni trigonometriche dell'angolo α, sapendo che:

a) $\cos(\alpha) = \frac{1}{4}$ $\qquad \pi \le \alpha \le 2\pi$

b) $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$ $\qquad 0 \le \alpha < \frac{\pi}{2}$

c) $\operatorname{sen}(\alpha) = -\frac{1}{3}$ $\qquad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le 0$

Cotangente

C'è un'altra funzione trigonometrica di uso comune. Si tratta della funzione cotangente. Senza addentrarci nella definizione geometrica ne diamo quella analitica e lo studente è invitato a ricavarne le proprietà per esercizio.

$$\mathrm{ctg}(\vartheta) = \frac{\cos(\vartheta)}{\mathrm{sen}(\vartheta)} \; .$$

Esercizio 6.4

Qual è il campo di definizione della cotangente? Per quali angoli ϑ è possibile scrivere $\mathrm{ctg}(\vartheta) = \dfrac{1}{\mathrm{tg}(\vartheta)}$?

Funzioni trigonometriche di angoli notevoli

Per alcuni angoli particolari lo studente può facilmente calcolare i valori delle funzioni trigonometriche utilizzando le definizioni date e alcune semplici proprietà geometriche. Alcuni esempi sono mostrati in tabella 6.1

Tabella 6.1: Funzioni trigonometriche di alcuni angoli notevoli.

ϑ	$\cos(\vartheta)$	$\mathrm{sen}(\vartheta)$	$\mathrm{tg}(\vartheta)$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	$-$
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
π	-1	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	$-$

Esercizio 6.5

Risolvere le seguenti equazioni in $[0,\ 2\pi]$ e in $[-\pi,\ \pi]$:

a) $\mathrm{sen}(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\mathrm{sen}(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\mathrm{tg}(x) = \sqrt{3}$ f) $\mathrm{ctg}(x) = \sqrt{3}$

Esercizio 6.6

Risolvere le seguenti equazioni in $[0,\ 2\pi]$:

a) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(x) = 1$

b) $\mathrm{tg}^2(x) - 3 = 0$

c) $2\,\mathrm{tg}^2(x) - \mathrm{tg}(x) + 1 = 0$

Funzione periodica Una caratteristica fondamentale delle funzioni trigonometriche è la periodicità. La definizione di funzione periodica è la seguente: si dice che una funzione f reale di variabile reale è periodica di periodo h se è

$$f(x+h) = f(x)$$

per ogni x.

Da questa definizione segue immediatamente l'interpretazione geometrica: se f è una funzione di periodo h, il suo grafico viene trasformato in sé da una traslazione di ampiezza h lungo l'asse x. È evidente che, se una funzione è periodica di periodo h, lo è anche di $2h$, $3h$, $-h$,...

Periodo Si è soliti chiamare periodo della funzione il più piccolo dei suoi periodi positivi. Dalla definizione data, si desume che alla funzione $f(x) = k$, definita su tutto l'asse reale, può essere attribuito come periodo ogni numero reale positivo.

Periodicità delle funzioni trigonometriche Per quanto riguarda le funzioni trigonometriche, in tutti gli infiniti angoli corrispondenti al punto P le funzioni $\cos(\vartheta)$ e $\mathrm{sen}(\vartheta)$ hanno gli stessi valori. Risulta, come conseguenza che

$$\begin{cases} \cos(\vartheta + 2k\pi) = \cos(\vartheta) \\ \mathrm{sen}(\vartheta + 2k\pi) = \mathrm{sen}(\vartheta) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

cioè le funzioni seno e coseno sono funzioni periodiche di periodo 2π.

Invece, per le funzioni $\mathrm{tg}(\vartheta)$ e $\mathrm{ctg}(\vartheta)$ si ha

$$\begin{cases} \mathrm{tg}(\vartheta + k\pi) = \mathrm{tg}(\vartheta) \\ \mathrm{ctg}(\vartheta + k\pi) = \mathrm{ctg}(\vartheta) \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

cioè le funzioni tangente e cotangente sono funzioni periodiche di periodo π.

Questa proprietà è di larga utilizzazione nella risoluzione delle equazioni trigonometriche.

Esempio 6.1 Ad esempio, l'equazione $\mathrm{sen}(x) = \dfrac{1}{2}$ viene risolta scrivendo innanzitutto le soluzioni su un intervallo di ampiezza 2π scelto arbitrariamente, che può essere $[0,\ 2\pi)$, ottenendo $x = \dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{3}$. Successivamente si aggiunge alle soluzioni scritte il termine $+2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) per avere tutte le radici reali, e cioè $x = \dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Si noti, come appena mostrato nell'esempio, che le funzioni sen e cos non sono iniettive nell'intervallo fondamentale $[0,\ 2\pi)$. Pertanto non possiamo affermare che se $\cos(\vartheta_1) = \cos(\vartheta_2)$ allora $\vartheta_1 = \vartheta_2 + +2k\pi$ per un opportuno $k \in \mathbb{Z}$. Tale circostanza si verifica se valgono entrambe le uguaglianze per i coseno e il seno:

$$\begin{cases} \cos(\vartheta_1) = \cos(\vartheta_2) \\ \mathrm{sen}(\vartheta_1) = \mathrm{sen}(\vartheta_2) \end{cases}, \quad \Longrightarrow \ \vartheta_1 = \vartheta_2 + k\pi, \ \{ \text{ per un opportuno } k \in \mathbb{Z}$$

Per le equazioni in cui la tangente compare come variabile l'intervallo scelto può essere $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ e il termine da aggiungere $+k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$: per $\operatorname{tg}(x) = -\sqrt{3}$ si avrà $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Esercizio 6.7

Risolvere su $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni:

a) $\operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	b) $\sqrt{2}\cos(x) = 1$
c) $4\operatorname{sen}^2(x) - 1 = 0$	d) $\operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x) = 0$
e) $\operatorname{tg}(x) = 1$	f) $\operatorname{tg}^2(x) = 3$
g) $\operatorname{ctg}(x) - \operatorname{ctg}^2(x) = 0$	h) $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{tg}(x) = 0$

Parità di seno e coseno

Se P' è il simmetrico di P rispetto all'asse delle x e ϑ è un angolo associato a P, allora $-\vartheta$ è un angolo associato a P'. Poiché, se $(x,\ y)$ sono le coordinate di P, $(x,\ -y)$ sono le coordinate di P', si ha

$$\begin{cases} \cos(-\vartheta) = \cos(\vartheta) \\ \operatorname{sen}(-\vartheta) = -\operatorname{sen}(\vartheta) \\ \operatorname{tg}(-\vartheta) = -\operatorname{tg}(\vartheta) \end{cases}$$

cioè la funzione coseno è una funzione pari mentre le funzioni seno e tangente sono funzioni dispari.

Formule per angoli supplementari

Se P' è il simmetrico di P rispetto all'asse delle y e ϑ è un angolo associato a P, allora $\pi - \vartheta$ è un angolo associato a P', che si chiama il supplementare di ϑ.
Se $(x,\ y)$ sono le coordinate di P allora $(-x,\ y)$ sono le coordinate di P' e risulta quindi

$$\begin{cases} \cos(\pi - \vartheta) = -\cos(\vartheta) \\ \operatorname{sen}(\pi - \vartheta) = \operatorname{sen}(\vartheta) \\ \operatorname{tg}(\pi - \vartheta) = -\operatorname{tg}(\vartheta)\ . \end{cases}$$

Formule per angoli complementari

Se P' è il simmetrico di P rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante e ϑ è un angolo associato a P, allora $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$ è un angolo associato a P' che si chiama complementare di ϑ. Se $(x,\ y)$ sono le coordinate di P allora $(y,\ x)$ sono le coordinate di P' e risulta quindi

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \operatorname{sen}(\vartheta) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \cos(\vartheta) \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \operatorname{ctg}(\vartheta)\ . \end{cases}$$

Monotonia delle funzioni trigonometriche

L'interpretazione delle funzioni trigonometriche sulla circonferenza trigonometrica, ci permette di stabilire le proprietà fondamentali del grafico delle rispettive funzioni. La funzione seno è crescente sull'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ ed è decrescente sull'intervallo $\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

La funzione coseno è decrescente sull'intervallo $[0,\ \pi]$ ed è crescente sull'intervallo $[\pi,\ 2\pi]$.
Infine, la funzione tangente è sempre crescente in $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$
I grafici delle funzioni seno, coseno e tangente sono rappresentati nelle figure 6.2, 6.3 e 6.5.

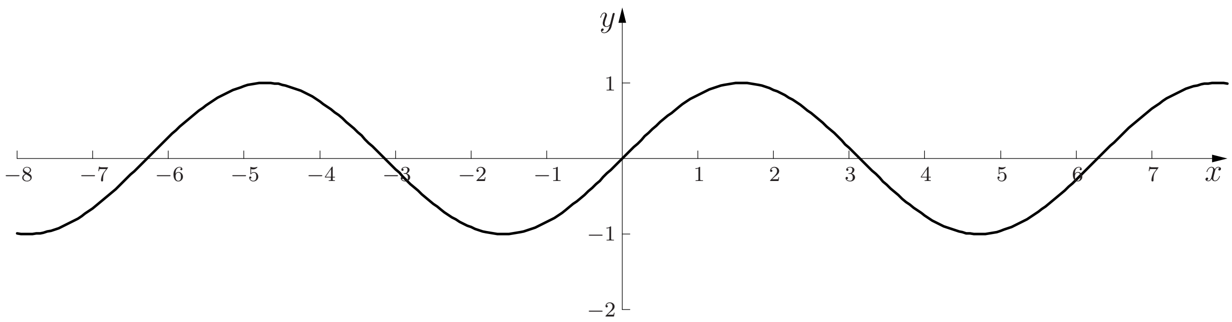

Figura 6.2: Grafico della funzione $y = \operatorname{sen}(x)$.

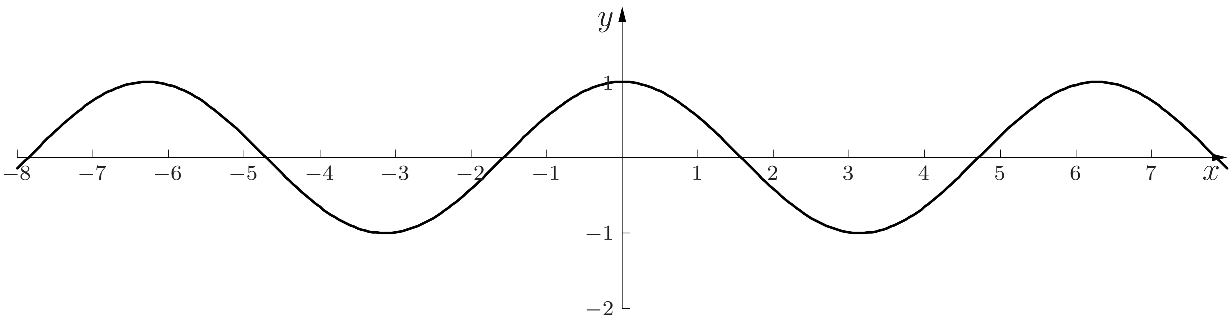

Figura 6.3: Grafico della funzione $y = \cos(x)$.

Esercizio 6.8 Qual è il grafico della funzione cotangente? Quale è la sua parità? Quali sono le proprietà di monotonia e di simmetria?

Esercizio 6.9 Individuare la periodicità delle funzioni seguenti e rappresentarle nel piano.

a) $y = \cos(2x)$ b) $y = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

c) $y = 3\operatorname{sen}(2x)$ d) $y = |3\operatorname{sen}(2x)|$

e) $y = 3\operatorname{sen}(-3x)$

f) $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ g) $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$

Diseguaglianza fondamentale Risulta essere molto importante nelle applicazioni all'analisi matematica la seguente osservazione:

$$\forall\ \vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{si ha} \qquad |\operatorname{sen}(\vartheta)| \le |\vartheta| \le |\operatorname{tg}(\vartheta)|\ .$$

Faremo la dimostrazione nel caso in cui P stia nel primo quadrante; il caso in cui P è nel quarto quadrante si ottiene per simmetria.

Notiamo anche che questa dimostrazione si basa sulla confusione fra angoli ed archi. Sul fatto cioè che il numero che esprime la misura in radianti di un angolo è uguale in valore assoluto al numero che esprime la lunghezza dell'arco corrispondente avendo preso come unità di misura di lunghezza il raggio del cerchio. La disuguaglianza non è vera se si misurano gli angoli in gradi sessagesimali!

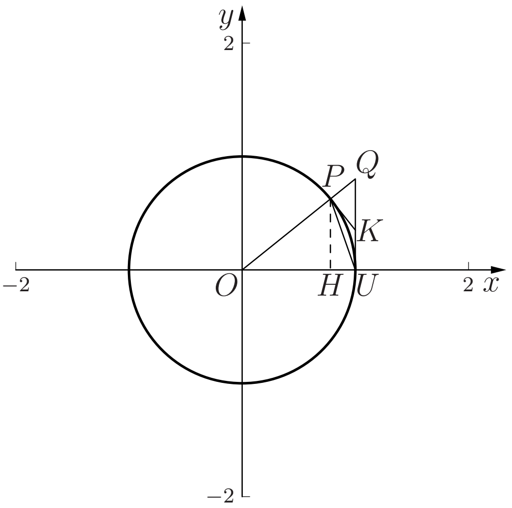

Figura 6.4: Dimostrazione della diseguaglianza fondamentale.

Facendo riferimento alla figura 6.4, ricordiamo che la lunghezza dell'arco di estremi P ed U è maggiore o uguale della lunghezza della corda $\overline{PU}$ e minore od uguale alla somma delle lunghezze dei due segmenti di tangente $\overline{PK}$ e $\overline{KU}$.
Inoltre il triangolo HPU è retto in H ed il triangolo PKQ è retto in P; allora $\overline{PH} \leq \overline{PU}$ e $\overline{PK} + \overline{KU} \leq \overline{QK} + \overline{KU} = \overline{QU}$.
Risulta quindi

$$\operatorname{sen}(\vartheta) \leq \vartheta \leq \operatorname{tg}(\vartheta) \ .$$

A futura memoria ricordiamo esplicitamente che, se $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \setminus \{0\}$, allora la disuguaglianza dimostrata può essere scritta come

$$\cos(\vartheta) \leq \frac{\operatorname{sen}(\vartheta)}{\vartheta} \leq 1 \ .$$

Disequazioni trigonometriche

Poiché le funzioni trigonometriche sono monotone solamente su determinati intervalli, la risoluzione delle disequazioni è semplice se ci si limita a questi intervalli.

Esempio 6.2

Ad esempio, $\operatorname{sen}(x) < \frac{1}{2}$ in $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ è evidentemente risolta per $-\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{6}$; $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ in $[0,\ \pi]$ è risolta per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$; $-1 < \operatorname{tg} x < 1$ in $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ è risolta da $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.
Per casi più complessi si rinvia al capitolo 7.

Formule di addizione e sottrazione

Un problema consiste, dati due angoli α e β, nell'esprimere $\cos(\beta - \alpha)$ in funzione di $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\operatorname{sen}(\beta)$, $\cos(\beta)$.
Sia α un angolo associato al punto P di $\mathbb{T}$ e sia β un angolo associato al punto Q di $\mathbb{T}$, allora $\beta - \alpha$ è un angolo associato alla coppia ordinata di semirette r_P e r_Q.

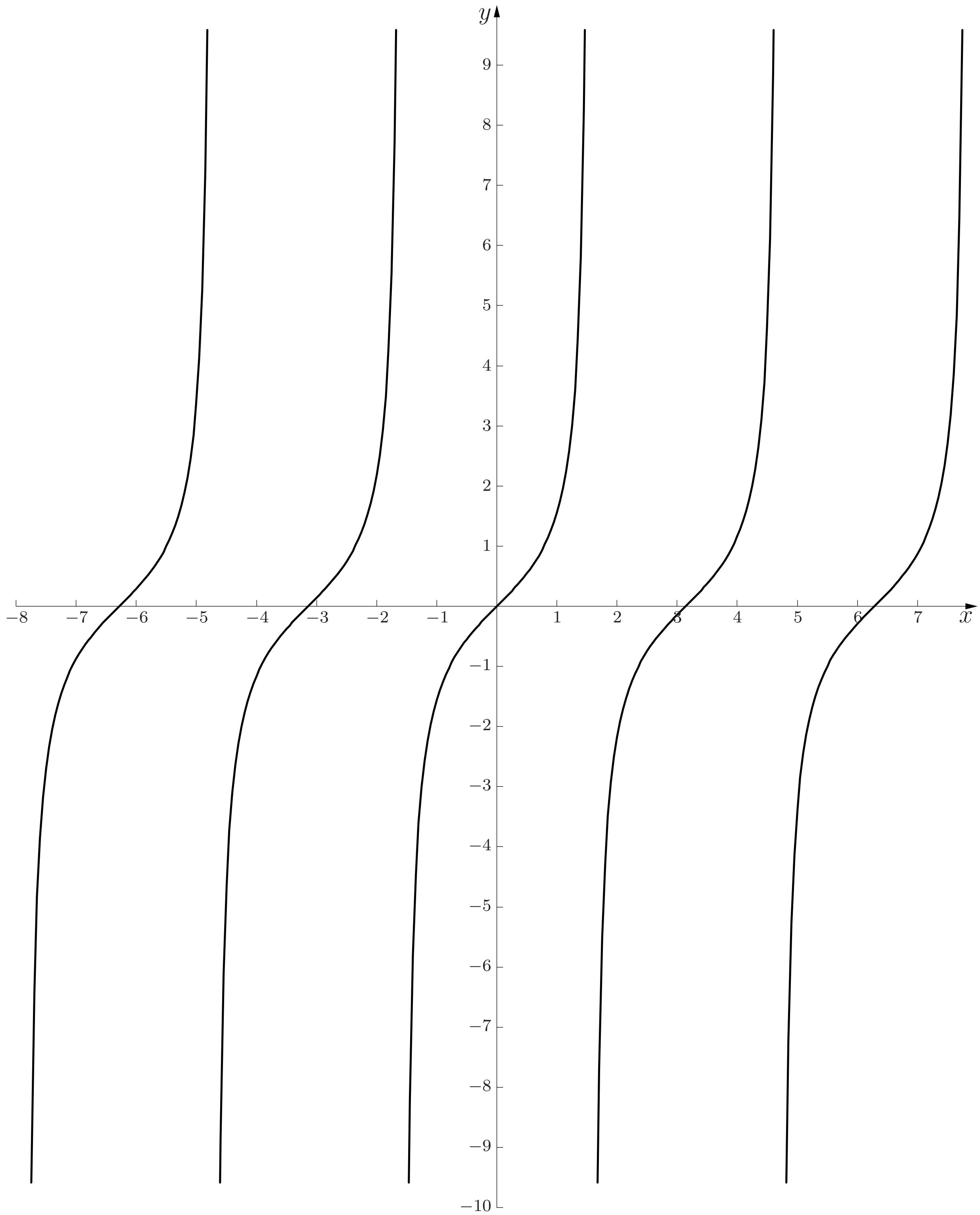

Figura 6.5: Grafico della funzione $y = \mathrm{tg}(x)$.

Con riferimento alla figura 6.6 abbiamo nella figura di sinistra $P \equiv (\cos(\alpha),\ \mathrm{sen}(\alpha))$ e $Q \equiv (\cos(\beta),\ \mathrm{sen}(\beta))$, nella figura di destra, ottenuta ruotando di α il triangolo OPQ, $P \equiv (1,\ 0)$ e $Q \equiv (\cos(\beta - \alpha),\ \mathrm{sen}(\beta - \alpha))$.
La distanza $\overline{PQ}$ è uguale nelle due figure perché i triangoli OPQ sono uguali essendo triangoli isosceli con i lati obliqui uguali e lo stesso angolo compreso.
Allora $(\cos(\beta) - \cos(\alpha))^2 + (\mathrm{sen}(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha))^2 = (1 - \cos(\beta - \alpha))^2 + \mathrm{sen}^2(\beta - \alpha)$.

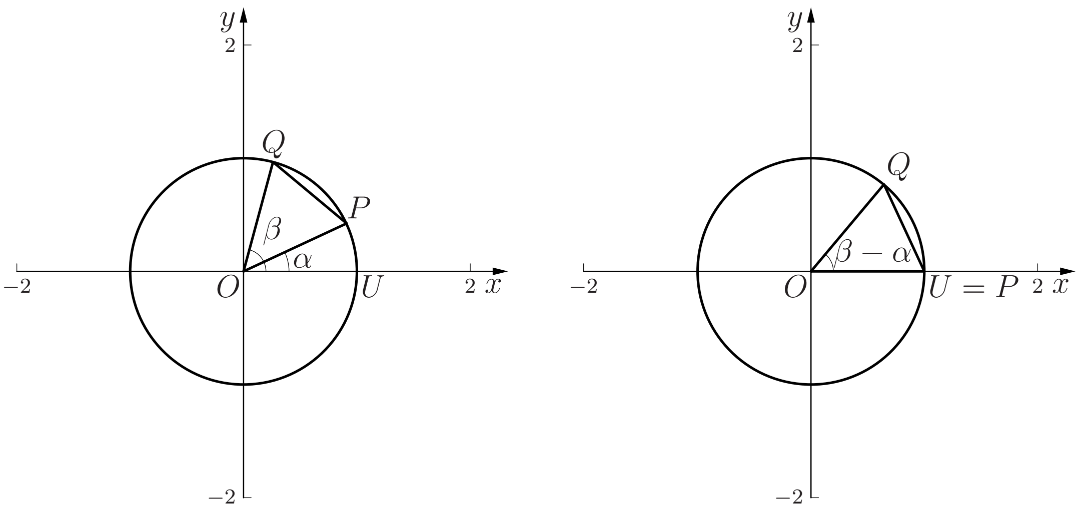

Figura 6.6: Formula di somma.

Sviluppando i calcoli e sfruttando il fatto che $\operatorname{sen}^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta) = 1$, si ottiene

$$2 - 2\cos(\beta)\cos(\alpha) - 2\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha) = 2 - 2\cos(\beta - \alpha)\ ,$$

cioè

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\alpha)\ .$$

Mediante passaggi di routine, sfruttando le proprietà di simmetria di seno e di coseno, si ottengono le seguenti formule note come formule di addizione e sottrazione. Si sostituisce α con $-\alpha$, poi α con $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$, poi di nuovo α con $-\alpha$.

$$\begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\ . \end{cases}$$

Ricavare $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ in funzione di $\operatorname{tg}(\alpha)$ e di $\operatorname{tg}(\beta)$, quando possibile. **Esercizio 6.10**

Risolvere le seguenti equazioni: **Esercizio 6.11**

a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = 1$

b) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

Le formule di addizione consentono di scrivere espressioni del tipo **Somma di seno e coseno aventi lo stesso periodo**

$$a\operatorname{sen}(x) + b\cos(x)$$

come

$$\sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\operatorname{sen}(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos(x)\right)$$

e infine nella forma

$$r \cdot \operatorname{sen}(x + \varphi)$$

con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e φ un angolo opportuno che verifica le condizioni $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\operatorname{sen}(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Esempio 6.3 Si risolvono così agevolmente equazioni del tipo $\operatorname{sen}(x) + \sqrt{3}\cos(x) = 1$. Infatti possiamo scrivere

$$\operatorname{sen}(x) + \sqrt{3}\cos(x) = 2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right) = 1$$

da cui

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

ottenendo $x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ e quindi $x = \dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 6.4 Analogamente si procede per ottenere la rappresentazione grafica della funzione $y = \operatorname{sen}(x)+2\cos(x)$ che, posto $y = \sqrt{5}\operatorname{sen}(x+\operatorname{arctg} 2)$ si ricava dalla sinusoide con una dilatazione di $\sqrt{5}$ parallela all'asse y ed una traslazione di $-\operatorname{arctg} 2$ parallelamente all'asse x (vedi figura 6.7).

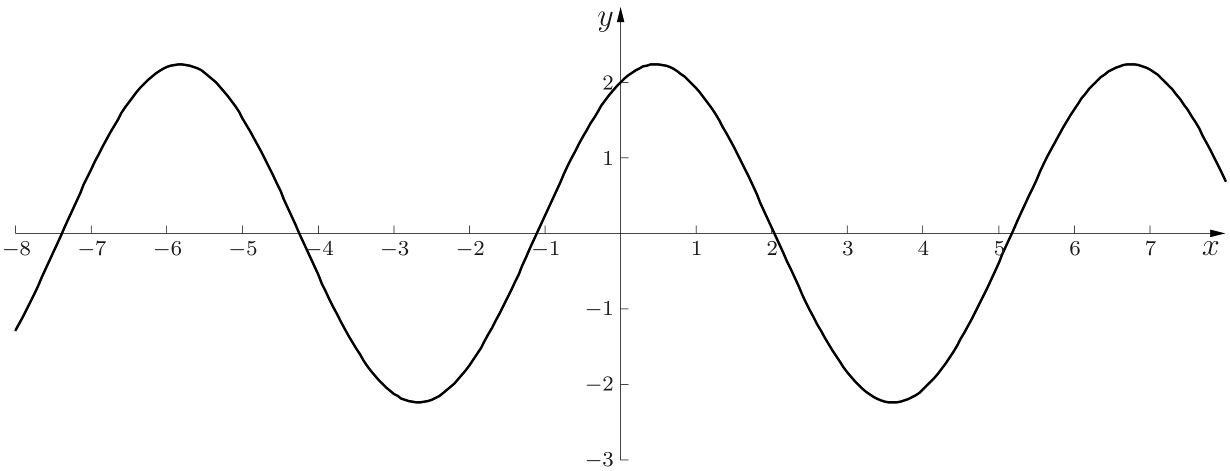

Figura 6.7: Grafico della funzione $y = \operatorname{sen}(x) + 2\cos(x)$.

Esercizio 6.12 Risolvere le seguenti equazioni dopo averle trasformate nella forma $\operatorname{sen}(x+\alpha) = k$:

a) $\sqrt{3}\operatorname{sen}(x) - \cos(x) = 1$

b) $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = 1$

c) $3\operatorname{sen}(x) + 4\cos(x) = 0$

Esercizio 6.13 Rappresentare le seguenti funzioni:

a) $y = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$

b) $y = 2\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x)$

Come casi particolari delle formule di somma, ponendo $\alpha = \beta$, si ottengono le formule di duplicazione e di bisezione. **Formule di duplicazione e bisezione**

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)\ . \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(\alpha)}{2} \\ \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{2}\ . \end{cases}$$

Risolvere le seguenti equazioni: **Esercizio 6.14**

a) $2\operatorname{sen}(2x) = \operatorname{tg}(x)$

b) $\operatorname{sen}(x) + \cos(x) = \cos(2x)$

c) $2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos(x) = 2$

Le formule di duplicazione trovano applicazione nelle equazioni e nelle funzioni in cui compaiono termini del tipo $a\operatorname{sen}^2(x) + b\cos^2(x) + c\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, dove si possono eseguire le seguenti sostituzioni:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \operatorname{sen}(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\ .$$

Ad esempio, l'equazione $\cos^2(x) + 2\sqrt{3}\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 1$ viene quindi trasformata in $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}(2x) + \dfrac{1}{2}\cos(2x)\right) = 1$. Ne segue $2\operatorname{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ che dà l'equazione $\operatorname{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ da cui è possibile ricavare $2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ed infine $x = \dfrac{\pi}{6} \pm \dfrac{\pi}{6} + k\pi$. **Esempio 6.5**

Analogamente, la funzione $y = \cos^2(x) + 2\sqrt{3}\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \operatorname{sen}^2(x)$, trascritta come $y = 2\operatorname{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ è ricavabile dalla sinusoide mediante dilatazione parallela all'asse y di fattore 2, traslazione di $-\pi/6$ parallela all'asse x ed infine dilatazione di fattore $1/2$ parallelamente all'asse x. Il grafico della funzione, periodica di periodo π, è mostrato in figura 6.8. **Esempio 6.6**

Risolvere le seguenti equazioni: **Esercizio 6.15**

a) $\operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 1$

b) $-\operatorname{sen}^2(x) - 2\sqrt{3}\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \cos^2(x) = 1$

Rappresentare le seguenti funzioni: **Esercizio 6.16**

a) $y = \sqrt{3}\cos^2(x) + 2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \sqrt{3}\operatorname{sen}^2(x)$

b) $y = \operatorname{sen}^2(x) + 3\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 2\cos^2(x)$

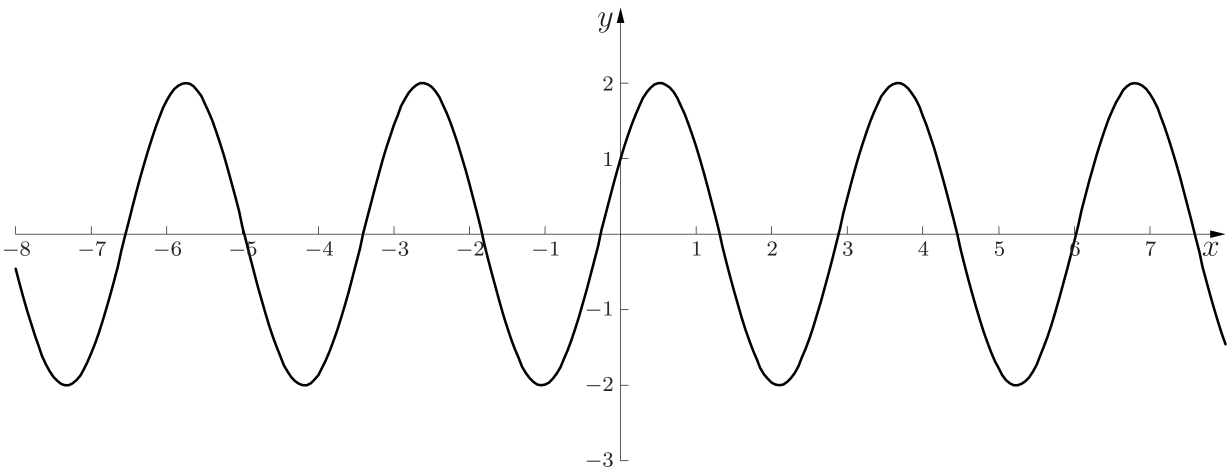

Figura 6.8: Grafico della funzione $y = \cos^2(x) + 2\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(x)\cos(x) - \mathrm{sen}^2(x)$.

Seno, coseno e tangente in funzione della tangente dell'angolo metà

Dalle formule di duplicazione, facendo il rapporto membro a membro otteniamo

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \ .$$

Dalle formule di bisezione, facendo il rapporto membro a membro e ricavando $\cos(\alpha)$, otteniamo

$$\cos(\alpha) = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \ .$$

Moltiplicando membro a membro le ultime due formule otteniamo

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \ .$$

Le ultime tre formule permettono di esprimere le tre funzioni trigonometriche come funzioni razionali di $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ (ovviamente se $\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \neq k\pi$). Ciò risulta utile nel calcolo degli integrali.

Esercizio 6.17 Risolvere le seguenti equazioni:

a) $\cos(x) - \mathrm{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$

b) $\dfrac{2(\cos(x) - \mathrm{sen}(x))}{\cos(x) + \mathrm{sen}(x) + 1} + \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{1 + \cos(x)} = 0$

Formule per i triangoli rettangoli

Storicamente, la trigonometria è legata al problema della risoluzione del triangolo. Dato un triangolo rettangolo possiamo sempre metterlo in un piano cartesiano con un cateto sull'asse delle x, il vertice relativo all'angolo non retto nell'origine, ed il terzo vertice nel primo quadrante (vedi figura 6.9). La lunghezza del cateto orizzontale coincide con l'ascissa di P, la lunghezza del cateto verticale coincide con l'ordinata di P, la lunghezza dell'ipotenusa coincide con ρ (vedi formule 6.1), quindi possiamo enunciare che, in un triangolo rettangolo, un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente oppure all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto. In formule

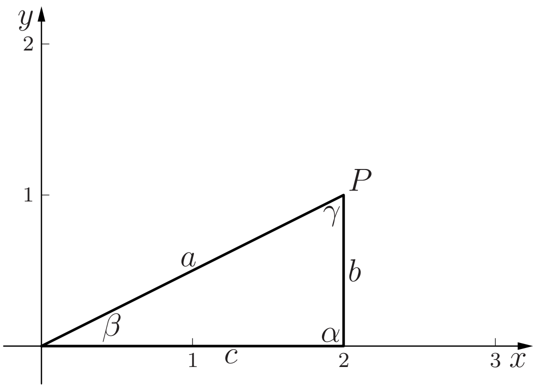

Figura 6.9: Triangolo rettangolo nel piano cartesiano

$$\begin{cases} c = a \cdot \cos(\beta) = a \cdot \operatorname{sen}(\gamma) \\ b = a \cdot \operatorname{sen}(\beta) = a \cdot \cos(\gamma) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{b}{c} = \operatorname{tg}(\beta) = \operatorname{ctg}(\gamma) \\ \\ \dfrac{c}{b} = \operatorname{ctg}(\beta) = \operatorname{tg}(\gamma) \ . \end{cases}$$

Per la risoluzione di un triangolo qualsiasi, ci si basa sui due seguenti teoremi fondamentali:

Teorema di Carnot

1) Teorema di Carnot:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \ .$$

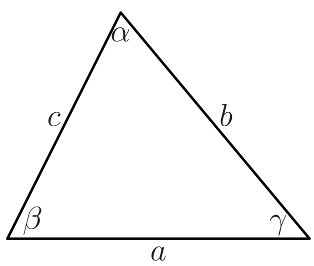

Figura 6.10: Triangolo con denominazione convenzionale dei suoi elementi.

Per ricavare b e c è sufficiente permutare ciclicamente i simboli usati.

Teorema dei seni

2) Teorema dei seni:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\gamma)} \ ,$$

dove con a, b, c, α, β, γ si indicano gli elementi del triangolo, come in figura 6.10.

Esercizio 6.18 Con riferimento al triangolo di figura 6.10, risolvere i triangoli conoscendo i seguenti elementi:

a)	$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$	$b = \dfrac{13\sqrt{2}}{2}$	$\beta = \dfrac{\pi}{12}$
b)	$a = 2$	$b = 1 + \sqrt{3}$	$c = \sqrt{6}$
c)	$a = 6$	$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$	$\beta = \dfrac{\pi}{6}$
d)	$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$	$b = 5$	$c = 5\sqrt{3}$
e)	$a = 12$	$b = 12\sqrt{2}$	$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

Esercizi di riepilogo del capitolo 6

6.19 È vero che $\cos(2x) \leq 1 \ \forall\ x \in \mathbb{R}$?

6.20 È vero che $\cos x + 2 \operatorname{sen} x \leq 4 \ \forall\ x \in \mathbb{R}$?

6.21 Determinare le soluzioni reali distinte contenute nell'intervallo $[0, 2\pi]$ delle seguenti equazioni:

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{sen}(x) = 0$$

6.22 Se $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, quali valori può assumere $\operatorname{sen}(x)$?

6.23 Se $\operatorname{sen}(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, quali valori può assumere $\cos(x)$?

6.24 Se $\operatorname{sen}(x) = 0$, quali valori può assumere $\cos(x)$?

6.25 Determinare il numero di soluzioni reali distinte contenute nell'intervallo $[0, 2\pi]$ dell'equazione $\cos(2x) + \operatorname{sen}(x) = 0$.

6.26 Risolvere le seguenti equazioni

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = 0 \qquad (\operatorname{sen} x)^2 + 2 \operatorname{sen} x + 1 = 0$$

$$\frac{2\operatorname{sen}(x)}{x} = 0 \qquad \operatorname{sen}(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$$

6.27 Esiste un triangolo con i lati di lunghezza $10, 12, 25$?

6.28 Dato un triangolo ABC, con $d(AB) = 5$, gli angoli $A\widehat{B}C = \frac{\pi}{2}$ e $B\widehat{A}C = \frac{\pi}{3}$, determinare la lunghezza dei lati BC e AC.

6.29 Se $\operatorname{sen}(x) = 0$ e $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, quanto vale $\cos(x)$?

6.30 Se $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, quanto vale x ?

6.31 Dimostrare che se i lati di un triangolo misurano $a^2 + a + 1$, $2a + 1$, $a^2 - 1$, allora un angolo del triangolo misura $\frac{2\pi}{3}$

6.32 Due cerchi $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ hanno lo stesso raggio $r = 1$ e il centro di uno si trova sul bordo dell'altro cerchio. Determinare la misura dell'area dell' intersezione $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.

Capitolo 7

Disequazioni

Generalità Sia data una funzione $f(x)$ reale di variabile reale. Il problema generale delle disequazioni consiste nel trovare l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ per cui $f(x) > 0$.

Naturalmente il segno "$>$" può essere sostituito da qualsiasi altro dei segni di disuguaglianza, "$<$", "$\geq$", "$\leq$".

I prerequisiti per affrontare questo argomento sono naturalmente le disuguaglianze e le relative proprietà.

Proprietà formali della disuguaglianze Anche se non dovrebbe essere necessario, richiamiamo brevemente le proprietà formali delle disuguaglianze. Ci limiteremo, nello scrivere le proprietà, al simbolo "$>$".

1. $\forall\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}, (a > b \iff a + c > b + c)$;

2. $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R},\ \text{e}\ \forall\ c > 0 (a > b \iff ac > bc)$;

3. $\forall\ a,\ b \in \mathbb{R},\ \text{e}\ \forall\ c < 0 (a > b \iff ac < bc)$.

La 1. ci permette di "portare" un addendo da un membro ad un altro purché gli si cambi segno. Infatti la 1. ci dice che $(a > b + c \iff a - c > b)$ avendo aggiunto ad ambo i membri $-c$.

La 2. ci dice che, moltiplicando ambo i membri di una disuguaglianza per un numero **positivo**, la disuguaglianza **non cambia** verso. Questa proprietà ci permette di spostare un fattore positivo da un membro all'altro di una disuguaglianza secondo la regola $(a > bc \iff a/c > b)$ avendo moltiplicato ambo i membri per il numero positivo $1/c$.

La 3. ci dice che, moltiplicando ambo i membri di una disuguaglianza per un numero **negativo**, la disuguaglianza cambia verso. Questa proprietà ci permette di spostare un fattore negativo da un membro all'altro di una disuguaglianza cambiando verso alla stessa secondo la regola ($a > bc \iff a/c < b$) avendo moltiplicato ambo i membri per il numero negativo $1/c$.

Sappiamo benissimo che lo studente conosce questo fatto, ma, al momento in cui deve applicarlo, spesso sbaglia. Ciò non avverrebbe se, anziché lavorare in modo automatico, pensasse al significato di quanto sta facendo.

Tipologia di problemi

Tornando al problema delle disequazioni, se ne incontrano generalmente di tre tipi: sia $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

1. Trovare almeno un $x \in \mathcal{A}$ tale che $f(x) > 0$;

2. Trovare un intervallo $(a,\ b)$ tale che $f(x) > 0\ \ \forall\ x \in (a,\ b) \cap \mathcal{A}$;

3. Trovare tutti gli $x \in \mathcal{A}$ per cui $f(x) > 0$.

I problemi sono esposti in ordine di difficoltà. Nel terzo caso non si può fare alcuna approssimazione, occorre trovare tutte le soluzioni senza perderne neanche una. Nei primi due casi abbiamo una certa libertà di azione. Se infatti non sappiamo risolvere la disuguaglianza $f(x) > 0$, possiamo tentare di sostituire la funzione $f(x)$ con una funzione $g(x)$ tale che $f(x) \geq g(x)\ \ \forall\ x \in \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, e risolvere poi la disuguaglianza $g(x) > 0$.
Chiaramente ogni soluzione dell'ultima disequazione è una soluzione anche della prima ma non è vero il viceversa.
Tuttavia ciò può bastare per risolvere un problema di tipo 1. o 2.
Se l'ultima disequazione non ha soluzioni, non è detto che la disequazione originaria non abbia soluzioni. Potrebbe verificarsi il caso di aver perso tutte le soluzioni.

Minorazione e maggiorazione

L'operazione fatta, sostituire f con una funzione più piccola, si chiama **minorazione**. In altri casi converrà sostituire f con una funzione più grande e si parlerà di **maggiorazione**.

Il problema delle disequazioni è utilmente rappresentabile graficamente. Se si disegna il grafico della funzione $f(x)$, le soluzioni della disequazione $f(x) > 0$ sono le ascisse dei punti la cui corrispondente ordinata è positiva, cioè sono le ascisse dei punti del grafico che stanno nel semipiano al di sopra dell'asse delle x.

Quando, disegnando il grafico di f anche solo qualitativamente, si può risolvere un problema di tipo 1. o 2., si parla di soluzione grafica di una disequazione.
A volte uno studio grafico qualitativo può portare alla soluzione di una disequazione altrimenti non risolubile.

Disequazioni algebriche di primo grado

La più semplice disequazione che possiamo scrivere è una disequazione algebrica di primo grado

$$ax + b > 0 \ .$$

Possiamo risolvere esattamente questa disequazione, nel senso di trovarne tutte le soluzioni, usando le proprietà delle disuguaglianze viste all'inizio.
Portando b a secondo membro e dividendo ambo i membri per a si ottiene il risultato. Attenzione, dividendo per a dobbiamo esaminare il segno di a. Il risultato è

$$ax + b > 0 \iff \begin{cases} x > -\dfrac{b}{a} & \text{se } a > 0 \\ x < -\dfrac{b}{a} & \text{se } a < 0 \ . \end{cases}$$

Notare che se $a = 0$ il problema non si pone in quanto il segno del primo membro non dipende da x: se $b > 0$ la disuguaglianza è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$, se $b < 0$ la disuguaglianza non è verificata da alcun $x \in \mathbb{R}$.
Lo studente, che generalmente è portato a memorizzare i risultati e non i procedimenti, incontrerà delle difficoltà a ricordare la casistica. La cosa più semplice è non ricordare nulla e ripercorrere i singoli passaggi in ogni caso particolare incontrato.

Risoluzione grafica delle disequazioni di primo grado

Un altro metodo per ottenere il risultato è quello grafico. Il luogo dei punti che verificano una equazione del tipo $y = ax+b$ è una retta. Se lo studente ha familiarità con il disegno delle rette, può disegnare il grafico della retta in questione e leggere sul disegno il risultato della disequazione.
Nella figura 7.1 si può osservare che se il grafico è "in salita", $a > 0$, allora la disequazione è verificata in tutti i punti a destra della intersezione con l'asse delle x che vale $x = -b/a$. Se il grafico è "in discesa", $a < 0$, allora la disequazione è verificata in tutti i punti a sinistra dell'intersezione.

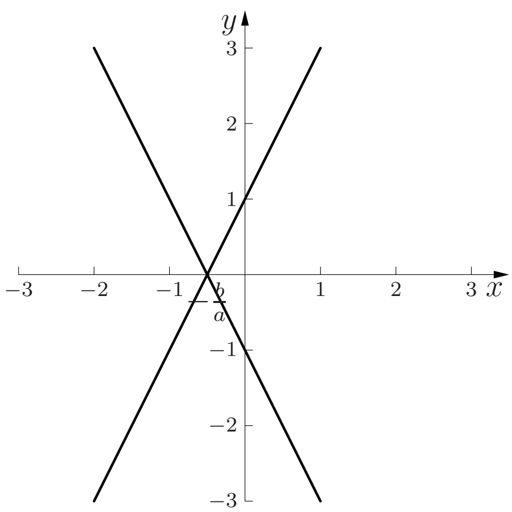

Figura 7.1: Disequazioni di primo grado

Esercizio 7.1

Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $-3x + 5 > -1$ b) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} \geq 2(a + b)$

c) $\frac{a - x}{b} - \frac{b - x}{a} \leq 0$

Disequazioni algebriche di secondo grado

Il grado successivo di complicazione è una disequazione algebrica di secondo grado del tipo

$$ax^2 + bx + c > 0 \ .$$

Notare che dovrà essere $a \neq 0$ altrimenti la disequazione è di primo grado se $b \neq 0$. Il trucco per risolvere questa disequazione è di scomporre il primo membro nel prodotto di tre fattori e di studiare separatamente il segno di ciascun fattore.

La tecnica è quella usata per dimostrare la formula risolutiva di una equazione di secondo grado.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\} \ . \end{aligned}$$

A questo punto, per scomporre l'argomento della parentesi graffa, occorre studiare il segno del numero

$$\Delta = (b^2 - 4ac) \ ,$$

detto **discriminante** dell'equazione.

Se $\Delta > 0$, allora $\Delta = (\sqrt{\Delta})^2$ ed in parentesi graffa abbiamo la differenza di due quadrati che può essere scomposta. Se $\Delta < 0$, l'argomento della parentesi graffa non è scomponibile perché può essere scritto come la somma di due quadrati. L'argomento della parentesi graffa è quindi positivo $\forall x \in \mathbb{R}$, ed il segno del trinomio è dato dal segno di a.

Stabiliamo quindi il risultato: dato il trinomio $ax^2 + bx + c$, se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, allora il trinomio è sempre positivo se $a > 0$, ed è sempre negativo se $a < 0$.

Se $\Delta > 0$, possiamo scomporre il trinomio come

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) .$$

Posto

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases} ,$$

si ha

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) .$$

Rappresentiamo i segni dei tre fattori nelle seguenti tabelle dove si è convenuto di indicare con x_1 la soluzione più piccola e con x_2 la soluzione più grande.

	x_1	x_2	
$+$	$+$	$+$	a
$-$	$+$	$+$	$x-x_1$
$-$	$-$	$+$	$x-x_2$
$+$	$-$	$+$	ax^2+bx+c

	x_1	x_2	
$-$	$-$	$-$	a
$-$	$+$	$+$	$x-x_1$
$-$	$-$	$+$	$x-x_2$
$-$	$+$	$-$	ax^2+bx+c

I segni della terza riga sono stati ottenuti applicando la regola dei segni del prodotto ai segni dei tre fattori rappresentati nella colonna sovrastante. Per memorizzare facilmente il risultato si può osservare che, in ambedue le tabelle, il segno del trinomio è lo stesso di a nelle due caselle esterne, mentre è opposto al segno di a nella casella centrale.

Stabiliamo quindi il risultato: Un trinomio di secondo grado ha il segno del coefficiente di secondo grado "all'esterno" dell'intervallo delle radici. Ha il segno opposto a quello del coefficiente di secondo grado all'interno dell'intervallo delle radici. In simboli

$$ax^2+bx+c \text{ ha il segno di } a \iff (x<x_1) \text{ o } (x>x_2) ;$$

$$ax^2+bx+c \text{ ha il segno opposto a quello di } a \iff x_1<x<x_2 .$$

Avvertiamo esplicitamente gli studenti di resistere alla tentazione di scrivere l'espressione $(x<x_1)$ o $(x>x_2)$ come $x_2<x<x_1$. L'ultima espressione sembra, a prima vista equivalente alla prima ma è errata. Infatti essa implica che $x_2<x_1$, contro l'ipotesi fatta.

Risoluzione grafica delle disequazioni di secondo grado

Di nuovo può essere utile uno studio grafico per evitare di memorizzare dei risultati e ricostruirli rapidamente caso per caso. Lo studente deve avere dimestichezza con il disegno rapido delle parabole. Abbiamo visto nel capitolo 2 che il luogo dei punti le cui coordinate verificano una equazione del tipo $y = ax^2$ è una parabola. Se $a > 0$, si dice che la parabola volge la concavità verso l'alto, mentre, se $a < 0$, si dice che la parabola volge la concavità verso il basso. Il grafico nelle due situazioni è rappresentato nelle figure 7.2 a) e b).

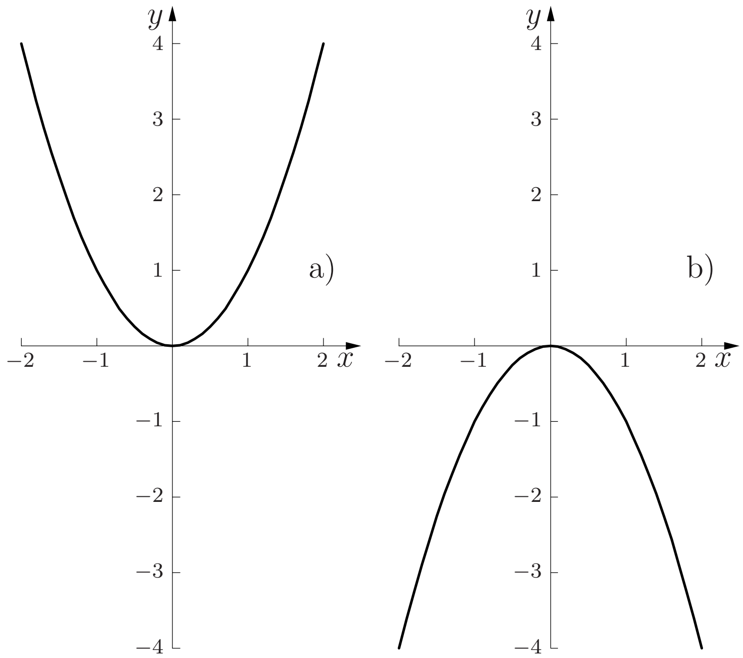

Figura 7.2: Parabole di equazione $y = ax^2$. a): $a > 0$; b): $a < 0$.

Traslare il grafico della funzione di x_0 lungo l'asse delle x e di y_0 lungo l'asse delle y, significa porre

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2 = ax^2 + (-2ax_0)x + (y_0 + ax_0^2) = ax^2 + bx + c \ .$$

Il confronto fra secondo e terzo membro fornisce il legame fra $(a,\ b,\ c)$ e $(x_0,\ y_0)$. Il punto di coordinate $(x_0,\ y_0)$ è il vertice della parabola che prima stava nell'origine. Abbiamo

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} \\ y_0 = c - ax_0^2 = c - a\dfrac{b^2}{4a^2} = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -\dfrac{\Delta}{4a} \ . \end{cases}$$

Il segno di a ed il segno di Δ determinano la posizione della parabola rispetto all'asse delle y. Se $\Delta > 0$ la parabola interseca l'asse delle x nei due punti di ascissa x_1 e x_2. Se $\Delta < 0$ la parabola non interseca l'asse delle x. Il segno di a determina il verso della concavità.

La casistica è illustrata nelle figure 7.3 a), b), c), d). Si vede immediatamente che:

– nella figura 7.3 a), con $\Delta > 0$, la funzione è positiva, come a, all'esterno dell'intervallo delle radici;

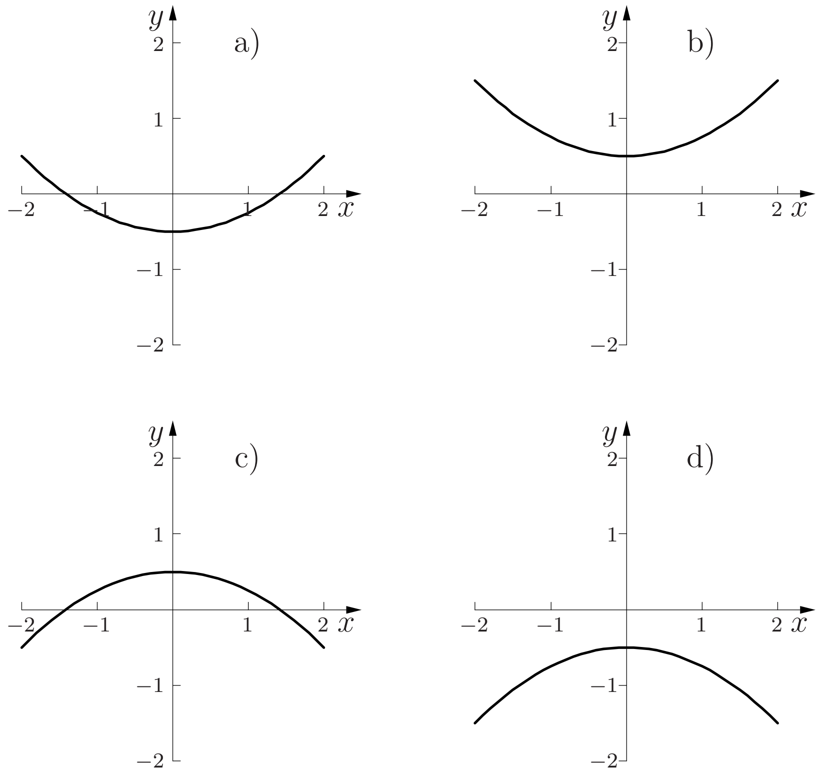

Figura 7.3: Parabole con le varie combinazioni di segno per a e Δ

– nella figura 7.3 b), con $\Delta < 0$, la funzione è sempre positiva come a;
– nella figura 7.3 c), con $\Delta > 0$, la funzione è negativa, come a, all'esterno dell'intervallo delle radici;
– nella figura 7.3 d), con $\Delta < 0$, la funzione è sempre negativa, come a.

Gli unici elementi che caratterizzano il segno di un trinomio di secondo grado sono a e Δ. Il segno di questi due numeri ci fornisce il tipo di soluzione della relativa disequazione.

Lo studente è generalmente in grado di memorizzare i precedenti risultati o un procedimento per ottenerli. Tuttavia l'esperianza insegna che, se qualche coefficiente del trinomio è nullo lo studente medio "va in tilt" e scrive le peggiori sciocchezze.

Analizziamo la disequazione $x^2 - 1 > 0$. Poiché manca il termine di primo grado, lo studente è portato istintivamente a scrivere $x^2 > 1$, da cui una delle seguenti oscenità: $x > \pm 1$, $x > 1$ e $x > -1$, $x > 1$.

Il trinomio $x^2 - 1$ ha il coefficiente $a = 1 > 0$ ed il discriminante vale $\Delta = 4 > 0$, quindi la disequazione è verificata per $x < -1$ e per $x > 1$. Ci si trova nel caso della figura 7.3 a).

Lo studente che non avesse dimestichezza con le disequazioni di secondo grado è invitato caldamente ad esercitarsi molto risolvendone una decina al giorno per almeno un mese. La soluzione di una disequazione di secondo grado non deve impegnare per più di 10 secondi.

Esercizio 7.2

Risolvere le seguenti disequazioni (essendo $a \in \mathbb{R}$):

a) $x^2 - 2x + 1 > 0$ b) $-x^2 + 2x + 1 > 0$

c) $ax^2 + (a-1)x - 1 > 0$ d) $x^2 + ax + (a-1)^2 > 0$

e) $|x^2 - 2| > 3$ f) $|x^2 - 3x| - 4 > 0$

g) $\begin{cases} x^2 - 8x - 20 < 0 \\ 5x - 1 > 2x - 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} ax^2 > ax \\ x^2 > a \end{cases}$

Disequazioni razionali

In presenza di una disequazione razionale, quoziente di due polinomi, si procede scomponendo numeratore e denominatore nel prodotto di polinomi di primo grado o di secondo grado con discriminante negativo, poi si studia il segno applicando la regola dei segni del prodotto. Si noti che il denominatore può essere di grado zero, nel qual caso si ha semplicemente un polinomio.
La scomposizione si può ottenere cercando le eventuali radici razionali del polinomio.
Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$; se tutti i coefficienti a_i sono numeri interi relativi allora le eventuali radici razionali sono della forma p/q dove p è un divisore di a_0 e q è un divisore di a_n.

Esempio 7.1

Consideriamo come esempio la seguente disequazione:

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6}{x^3 - x} > 0 \; .$$

Le eventuali radici razionali del numeratore sono $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$. Procedendo per tentativi, si trova che 2 e 3 sono radici, quindi il numeratore è divisibile per $(x-2)(x-3) = (x^2 - 5x + 6)$.
Eseguiamo la divisione:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -5x^3 & +7x^2 & -5x & +6 & x^2 - 5x + 6 \\ \cline{6-6}
-x^4 & +5x^3 & -6x^2 & & & x^2 + 1 \\ \cline{1-3}
= & = & x^2 & -5x & +6 & \\
 & & -x^2 & +5x & -6 & \\ \cline{3-5}
 & & = & = & = &
\end{array}$$

Il numeratore si scompone come $(x-2)(x-3)(x^2+1)$. Il denominatore diviene $x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$.

Abbiamo sei fattori di cui studiamo separatamente il segno:

$$\begin{cases} x-2>0 \iff x>2 \\ x-3>0 \iff x>3 \\ x^2+1>0 \quad \text{sempre} \\ x>0 \iff x>0 \\ x-1>0 \iff x>1 \\ x+1>0 \iff x>-1\ . \end{cases}$$

Per ottenere il segno di $f(x)$ usiamo una tabella come nel caso della equazione di 2^o grado.

	-1	0	1	2	3	
$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$x-2$
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x-3$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	x^2+1
$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	x
$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$x+1$
$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x-1$
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$f(x)$

Nelle colonne in cui c'è un numero pari di segni "$-$" si scrive "+", nelle colonne in cui c'è un numero dispari di segni "$-$" si scrive "$-$".
La disequazione assegnata è verificata in $(-1,\ 0) \cup (1,\ 2) \cup (3,\ \infty)$.

Esercizio 7.3 Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $\dfrac{x-1}{x+1} > 1$ b) $\dfrac{x-1}{x^2-1} > \dfrac{x}{x+1}$

c) $\dfrac{x-3}{ax+1} < 0$ con $a \in \mathbb{R}$ d) $\dfrac{5x^3+x^2-20x-4}{4x^3+12x^2-9x-27} > 0$

e) $\left| x - \dfrac{4}{x} - 2 \right| \geq 1$ f) $\left| \dfrac{x^2-1}{x} \right| < 2x$

Disequazioni irrazionali In questo tipo di disequazioni sono presenti dei radicali. Non si può descrivere in generale una tecnica per risolverle, tuttavia ci sono alcuni criteri che ci possono guidare.

1º caso Se nella disequazione compare soltanto una radice cubica (o di ordine dispari), poiché la radice cubica è definita su $\mathbb{R}$ e l'elevamento al cubo è una funzione crescente in $(-\infty,\ \infty)$, è immediato eliminare la radice elevando ambo i membri al cubo.

Esempio 7.2 Ad esempio la disequazione irrazionale $\sqrt[3]{x^2-x} > x$ è equivalente alla disequazione razionale $x^2 - x > x^3$.

Risolvere le seguenti disequazioni: **Esercizio 7.4**

a) $\sqrt[3]{1+3x-3x^2} > x-1$ b) $\sqrt[3]{x^3-x} > |x|$

c) $\sqrt[3]{2x-1} < 1$ d) $\sqrt[3]{x^3+2} > x-1$

Se invece nella disequazione compare una radice quadrata (o di ordine pari), come ad esempio in **2° caso**

$$\sqrt{x^2-1} \geq x-3 \ ,$$

è necessaria una maggiore attenzione. Sono fondamentali in questo caso tre osservazioni:

1. Il dominio di definizione non è necessariamente $\mathbb{R}$, poiché la radice quadrata di un numero negativo non è definita. Nell'esempio, poiché si deve avere $x^2-1 \geq 0$, eventuali soluzioni delle disequazioni si avranno per $x \leq -1$ o $x \geq 1$.

2. La radice quadrata non è mai negativa, e questo consente spesso significative semplificazioni nel calcolo: nell'esempio, i valori del dominio per cui si ha $x-3 < 0$ evidentemente risolvono la disequazione. In pratica, queste soluzioni vengono ottenute risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \\ x-3 < 0 \ , \end{cases}$$

ottenendo $x \in (-\infty, \ -1] \cup [1, \ 3)$.
Rimane così aperto solamente il problema di studiare, nel dominio, i valori per cui è $x-3 \geq 0$.

3. Nel solo caso rimasto, i membri della diseguaglianza sono entrambi non negativi; poiché l'elevamento al quadrato è una funzione crescente in $[0, \ \infty)$, la disequazione data è equivalente a quella ottenuta elevando al quadrato entrambi i nembri. Nell'esempio si ha $x^2-1 \geq (x-3)^2$. In pratica, le soluzioni di questa disequazione si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \\ x-3 \geq 0 \\ x^2-1 \geq (x-3)^2 \end{cases}$$

da cui si ottiene $x \in [3, \ +\infty)$.

Concludendo, la disequazione è verificata $\forall x \in \mathbb{R} \setminus (-1, \ 1)$.
Se, evitando ogni considerazione, si innalzassero al quadrato ambo i membri, scrivendo $x^2-1 \geq (x-3)^2 = x^2-6x+9$, otterremmo il risultato $x \geq \frac{5}{3}$, del tutto privo di significato.

Riassumendo, la disequazione del tipo

$$\sqrt{A(x)} \geq B(x)$$

ha come soluzioni l'unione delle soluzioni di due sistemi razionali

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) \geq B^2(x) \end{cases}$$

nel secondo dei quali la disequazione $A(x) \geq 0$, fondamentale perché il calcolo sia corretto, non è stata riportata in quanto implicita nell'ultima disequazione scritta.

3° caso Analoga al 2°, ma più semplice è la disequazione irrazionale del tipo

$$\sqrt{x^2 - 1} \leq x + 1 \ .$$

È sempre ovviamente fondamentale studiare il dominio della radice, definita solo se è $x^2 - 1 \geq 0$, cioè $x \in (-\infty,\ -1] \cup [1,\ \infty)$; ma non hanno alcun rilievo i valori per cui è $x + 1 < 0$, che non possono risolvere la disequazione, non potendo essere la radice, sempre ≥ 0, minore di questo. Non occorre considerare quindi altro che il caso $x + 1 \geq 0$, e allora la disequazione è composta di termini non negativi , quindi è equivalente alla disequazione razionale ottenuta elevando al quadrato. Si conclude che la disequazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 \leq (x + 1)^2 \end{cases}$$

ed ha come soluzione $x \geq 1$.
Riassumendo, la disequazione del tipo

$$\sqrt{A(x)} \leq B(x)$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) \leq B^2(x) \end{cases}$$

Esercizio 7.5 Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $\sqrt{x - 1} < 3$

b) $\sqrt{x - 1} > x - 2$

c) $\sqrt{x - 1} > \sqrt{4x^2 - 1}$

d) $4x + 2\sqrt{5 - 4x} \geq 5$

e) $\sqrt{3x - 8} - \sqrt{5x + 3} > \sqrt{x + 6}$

f) $3x - \sqrt{9 - x} \leq 3$

g) $\sqrt{x(x - a)} > x - a \qquad (a \in \mathbb{R})$

h) $\sqrt{x + 7} - \sqrt{6 - x} > \sqrt{2x - 3}$

i) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 2} < \sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 3}$

In modo analogo si risolvono le disequazioni esponenziali e logaritmiche, innanzitutto individuando il dominio e successivamente semplificando il calcolo con l'osservare se la funzione coinvolta è crescente oppure decrescente.

Disequazioni esponenziali

Una disequazione del tipo

$$2^{3x+1} > 2^{4x-3}$$

è definita su $\mathbb{R}$ e, poiché la funzione esponenziale è crescente, avendo base 2 che è maggiore di 1, equivale alla disequazione

$$3x + 1 > 4x - 3 \; .$$

Invece, la disequazione

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-3}$$

in cui la funzione esponenziale è decrescente, avendo come base $\frac{1}{2}$ che è un numero compreso fra 0 e 1, equivale a

$$3x + 1 < 4x - 3 \; .$$

Riassumendo, la disequazione

$$a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \quad \text{con } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

equivale a $f(x) \geq g(x)$ se è $a > 1$ mentre equivale a $f(x) \leq g(x)$ se è $0 < a < 1$.

Esempio 7.3

A volte le disequazioni esponenziali non si presentano in questa forma, ma si possono ricondurre ad essa con opportuni calcoli.
Se le basi della funzione esponenziale sono diverse, come nell'esempio $4^{x+1} > 2^{3x-2}$, è immediato scrivere $2^{2(x+1)} > 2^{3x-2}$.
In generale, per $a^{f(x)} \geq b^{g(x)}$ si ha la trascrizione $b^{f(x)\cdot\log_b a} \geq b^{g(x)}$.

Esempio 7.4

Può essere sufficiente una sostituzione per ricondurre alla forma illustrata sopra una disequazione del tipo $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 > 0$. Infatti, ponendo $5^x = t$, si ottiene $t^2 - 6t + 5 > 0$ che ha soluzioni $t < 1$ o $t > 5$. Si conclude quindi che la disequazione data è risolta per $5^x < 1$ o $5^x > 5$, cioè per $x < 0$ o $x > 1$.

Esercizio 7.6

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali:

a) $\dfrac{3^{x+1} + 3^{2-x} - 4}{3^x} < \dfrac{8}{3}$ b) $2^{\frac{9}{x}} - 2^x < 0$

c) $e^x + e^{-x} < -\dfrac{3}{2}$ d) $2^{\frac{x+1}{x-1}} > 1$

Disequazioni logaritmiche Data una disequazione del tipo $\log_2(x-1) > \log_2(3-x)$, in primo luogo occorre individuare il dominio, dovendo essere l'argomento della funzione logaritmo strettamente positivo. In questo caso, dovendo essere $x-1>0$ e $3-x>0$, esso è $1<x<3$. In secondo luogo si osserva che la funzione logaritmo è, nel suo dominio, crescente se la base (in questo caso 2) è maggiore di 1, quindi la disequazione data è equivalente a $x-1>3-x$. La disequazione data è quindi risolta per $2<x<3$.

Esempio 7.5 La disequazione $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(3-x)$, che ha il medesimo dominio della precedente, equivale a $x-1<3-x$ essendo la base del logaritmo compresa fra 0 e 1, quindi è risolta per $1<x<2$.

Riassumendo, la disequazione $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$ è equivalente a

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \qquad \text{per } a > 1$$

mentre è equivalente a

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \qquad \text{per } 0 < a < 1 \ .$$

Esercizio 7.7 Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche:

a) $\log(x^2-x-1) > 0$ b) $\log(x+4)^2 > \log(3x+10)$

c) $\log_{\frac{1}{3}} \dfrac{2}{2x+x^2} > 1$ d) $\log_a(1+2x-x^2) > 2$

e) $\log^3 x^3 - 8 > 0$ f) $\log^2 x^2 \geq \log^4 x^6$

Disequazioni trigonometriche Per le disequazioni trigonometriche non si presentano problemi particolari per quanto riguarda il dominio, tranne che per la funzione tangente che non è definita per $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Il calcolo risulta invece piuttosto delicato perché le funzioni seno, coseno e tangente non sono monotone su tutto l'asse reale. La risoluzione di questo tipo di disequazioni si conduce usando il grafico delle funzioni trigonometriche, o, spesso più comodamente, utilizzando la loro definizione sulla circonferenza trigonometrica, così come è rappresentata nella figura 7.4 in cui è $P(\cos(x),\ \text{sen}(x))$ e $Q(1,\ \text{tg}(x))$ e in cui gli assi sono stati indicati con X e Y per evitare confusione con la variabile x che rappresenta l'angolo.

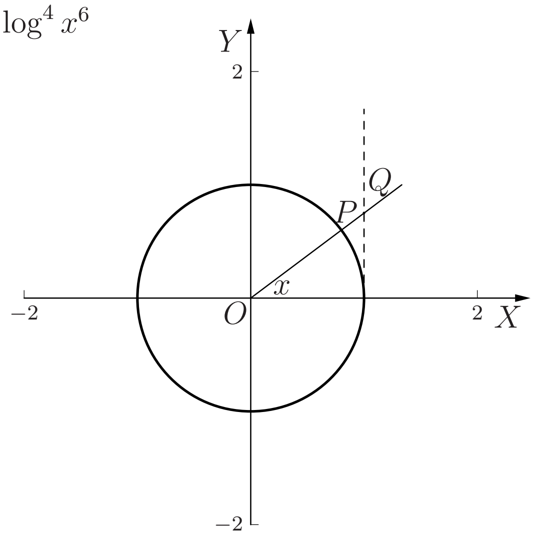

Figura 7.4: Circonferenza trigonometrica.

Esempio 7.6 La disequazione $\cos(x) > \frac{1}{2}$ si risolve tracciando nella figura 7.4 la retta $X = \frac{1}{2}$ che interseca la circonferenza trigonometrica in due punti corrispondenti agli angoli $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ di coseno $\frac{1}{2}$. La disequazione è quindi risolta per $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Esempio 7.7 La disequazione $\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \cos(x)\operatorname{sen}(x) > 0$ può essere utilmente trascritta nella forma $\cos(x)\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)\right) > 0$. Poiché non è possibile dividere entrambi i membri per $\cos(x)$, fattore che al variare dell'angolo cambia segno e anche si annulla, occorre studiare il segno di entrambi i fattori. Si arriva alla soluzione $k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ con esclusione degli angoli $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ in cui l'espressione si annulla e $x = k\pi$ in cui non è definita la frazione $\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$ perché il denominatore si annulla.

Esempio 7.8 La disequazione $2\cos^2(x) - \operatorname{sen}(x) - 1 < 0$ può essere risolta ricordando la relazione trigonometrica $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ e scrivendo $2\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(x) - 1 > 0$. Ponendo $\operatorname{sen}(x) = t$ si ottiene la disequazione "ausiliaria" $2t^2 + t - 1 > 0$ che è risolta per $t \in (-\infty,\ -1) \cup (\frac{1}{2},\ +\infty)$. La soluzione della disequazione di partenza coincide quindi con l'unione delle soluzioni delle disequazioni $\operatorname{sen}(x) < -1$ e $\operatorname{sen}(x) > \frac{1}{2}$. La prima non è verificata da alcun valore di x, la seconda è risolta per $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ che è quindi anche la soluzione della disequazione data.

Esempio 7.9 La disequazione $\operatorname{sen}(x) + \sqrt{3}\cos(x) > 1$ può essere risolta dividendo entrambi i membri per $\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, ottenendo $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) > \frac{1}{2}$, da cui $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$ o, equivalentemente $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$. Ripetendo i calcoli già svolti nell'esempio 7.8 si ricava $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ e infine si ottiene $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Esempio 7.10 La disequazione $4\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x) < \sqrt{3}$ può essere trasformata utilizzando la formula di duplicazione del seno $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$, ottenendo quindi $\operatorname{sen}(2x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ponendo $2x = z$, si ottiene $\operatorname{sen}(z) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ che è risolta per $-\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < z < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, e si ottiene quindi $-\frac{2}{3}\pi + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Esercizio 7.8 Risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche:

a) $\mathrm{tg}(x) > 1$ b) $\cos^2(x) > \dfrac{1}{2}$

c) $2\,\mathrm{sen}(x) < 3$ d) $4\,\mathrm{sen}^2(x) + 7\,\mathrm{sen}(x) - 2 \leq 0$

e) $\mathrm{sen}(2x) \leq \cos(x)$ f) $\dfrac{\mathrm{sen}(x) - \frac{1}{2}}{\cos(x) + \frac{1}{2}} \geq 0$

g) $\mathrm{sen}(x) + \cos(x) \geq 0$ h) $\mathrm{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos(x) + 2 > 0$

Esempio 7.11 Il seguente sistema di disequazioni di primo grado in due variabili

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 1 \\ 2x + y \leq 1 \end{cases}$$

può essere risolto rappresentando in un piano cartesiano i quattro semipiani individuati da ciascuna disequazione, e trovandone l'intersezione. Dalla figura 7.5 si vede che le soluzioni sono i punti del quadrilatero $ABCO$.

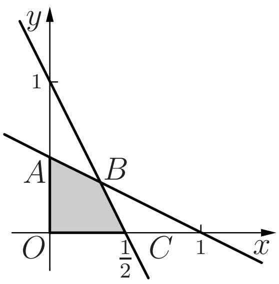

Figura 7.5: Sistema di disequazioni lineari in due variabili risolto con tecniche grafiche

Esercizi di riepilogo del capitolo 7

7.9 "Se $a > b$ allora $a^2 > b^2$". La precedente affermazione è vera o falsa ?

7.10 "Se $a > b$ allora $a^3 > b^3$". La precedente affermazione è vera o falsa ?

7.11 "Se $a > b > 0$ allora $\log_3 a > \log_3 b$". La precedente affermazione è vera o falsa ?

7.12 "Se $a > b$ allora $a + c > b + c$ per qualsiasi valore di c". La precedente affermazione è vera o falsa ?

7.13 "Se $a > b$ e $c > d$ allora $a + c > b + d$". La precedente affermazione è vera o falsa ?

7.14 "Se $a > b$ e $c > d$ allora $a + d > b + c$". La precedente affermazione è vera o falsa ?

7.15 Risolvere le seguenti disequazioni

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} > 0 \qquad \frac{x^2 + x + 10}{x - 1} > 1$$

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{x^3 + x} > 0 \qquad \frac{x^4 - 4}{x^3 - 5x^2 + 4x} > 0$$

$$\sqrt{x - 1} \leq 4 \qquad |x - 1| < 4$$

$$3^{x+3} > 9 \qquad 3^x + 9^x > 6$$

$$\sqrt{2x + 1} \geq x \qquad \log_3(x + 3) \leq 0$$

$$\log_3(|x + 3|) \leq 0 \qquad \log_5(2x + 3) \leq 2$$

$$2\cos(2x) + 1 \geq 0, \quad x \in [0, 2\pi] \qquad \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 - 2\operatorname{sen}(x)} > 0$$

Capitolo 8

Esempio di test alla fine del precorso

Università di Pisa - Facoltà di Ingegneria

Test d'ingresso di Matematica – Istruzioni

1. Tempo a disposizione: 30 minuti.

2. Il test è costituito da 20 domande. Ogni domanda è seguita da quattro risposte, indicate con le lettere A, B, C, D. Una sola di queste risposte è corretta, le altre 3 sono errate.

3. Ogni risposta ERRATA vale $-\frac{1}{4}$, ogni risposta MANCANTE vale 0, ogni risposta ESATTA vale $+1$.

4. Il TEST verrà considerato superato se lo studente ottiene un punteggio ≥ 7.

5. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, strumenti di comunicazione. Si può usare carta propria, purché non facente parte di quaderni o simili. Non si possono fare domande, neanche sul testo, agli addetti alla sorveglianza.

6. Si consiglia caldamente di precompilare a matita o in brutta, e di riempire la griglia a penna solo quando si è sicuri che non ci saranno ripensamenti. Si consiglia anche di ricopiare in brutta le risposte date (o di segnarle sul foglio con le domande) in modo da poter calcolare il proprio punteggio da soli, non appena le risposte giuste saranno rese note (alla fine del tempo).

Università di Pisa - Facoltà di Ingegneria

Test d'ingresso di Matematica - ESEMPIO n.1

1. $\frac{1}{3} \cdot 3^{99} =$

   (**A**) 3^{100} (**B**) 3^{98} (**C**) 3^{33} (**D**) 1.

2. $\log_3 5 + \log_3 12 =$

   (**A**) $\log_3(17)$ (**B**) $\log_3(60)$ (**C**) $\log_3\left(\sqrt[5]{12}\right)$ (**D**) $\log_5(60)$

3. $2^5 + 2^5 =$

   (**A**) 2^{10} (**B**) 2^{11} (**C**) 2^6 (**D**) 2^7

4. $\operatorname{sen} 240° =$

   (**A**) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (**B**) $-\frac{1}{2}$ (**C**) $\frac{1}{2}$ (**D**) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. Siano $f(x) = x^2$, $g(x) = \log x$. Allora $f(g(x))$ è uguale a...

   (**A**) $(\log(x))^2$ (**B**) $\log(x^2)$ (**C**) $\log^2(x^2)$ (**D**) $\log^2(x^2) + \log_2 x$

6. Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ e $x \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, quanto vale x?

   (**A**) $\frac{\pi}{6}$ (**B**) $\frac{\pi}{4}$ (**C**) $\frac{\pi}{3}$ (**D**) $\frac{\pi}{2}$

7. $\log_2 (32 \cdot 8^4) =$

   (**A**) 8 (**B**) 15 (**C**) 17 (**D**) 9

8. Quale delle seguenti coppie (x, y) è soluzione del sistema di equazioni $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$?

   (**A**) $(1, 2)$ (**B**) $(1, 4)$ (**C**) $(4, 2)$ (**D**) $(4, 1)$

9. Per quale valore del parametro a la retta di equazione $y = 2x + 3$ e la retta di equazione $ax + 2y + 5 = 0$ sono perpendicolari?

   (**A**) 1 (**B**) -4 (**C**) 4 (**D**) 2

10. Qual è il centro della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 9$?

    (**A**) $(0, 0)$ (**B**) $(1, 0)$ (**C**) $(1, 3)$ (**D**) $(1, 2)$

11. Qual è il resto della divisione $(x^4 + 2x^2 + 2x + 1) : (x^2 + 1)$?

    (**A**) $2x - 1$ (**B**) $2x$ (**C**) $2x + 1$ (**D**) $2x + 2$

12. Nel triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa BC è lunga 4 ed il cateto AB è lungo $\sqrt{12}$. Quanto misura l'angolo $\widehat{B}$?

    (**A**) $\dfrac{\pi}{2}$ (**B**) $\dfrac{\pi}{3}$ (**C**) $\dfrac{\pi}{6}$ (**D**) $\dfrac{2\pi}{3}$

13. Qual è la soluzione della disequazione $3^{3x+2} \leq 3$?

    (**A**) $0 \leq x \leq 1$ (**B**) $0 < x \leq -\dfrac{1}{3}$ (**C**) $x \leq -\dfrac{1}{3}$ (**D**) $x < 1$

14. Quale delle seguenti equazioni ha esattamente due soluzioni *reali distinte*?

    (**A**) $x + 2 = 3x + 7$

    (**B**) $x^2 + 2x + 8 = 0$

    (**C**) $x^2 + 5 = 0$

    (**D**) $x^4 - 4 = 0$

15. Da un sondaggio svolto al precorso, risulta che "Tutti gli studenti parsimoniosi, iscritti a Telecomunicazioni, sono lucchesi". Assumendo che il contrario di "parsimoniosi" sia "spendaccioni", quale delle seguenti frasi è *equivalente* alla precedente?

    (**A**) "Tutti gli studenti lucchesi, iscritti a Telecomunicazioni, sono parsimoniosi"

    (**B**) "Tutti gli studenti lucchesi e parsimoniosi sono iscritti a Telecomunicazioni"

    (**C**) "Tutti gli studenti spendaccioni, iscritti a Telecomunicazioni, non sono lucchesi"

    (**D**) "Tutti gli studenti di Telecomunicazioni, che non sono lucchesi, sono spendaccioni"

16. $\sqrt{8} + \sqrt{18} =$

    (**A**) $\sqrt{26}$ (**B**) $\sqrt{50}$ (**C**) 12 (**D**) 26

17. Siano a e b due numeri reali. Quante delle seguenti quattro disuguaglianze

    $a^{2001} < b^{2001}$ $a^{2002} < b^{2002}$ $a^{2003} < b^{2003}$ $a^{2004} < b^{2004}$

    implicano necessariamente la disuguaglianza $a < b$?

    (**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4

18. Il numero di soluzioni *reali distinte* dell'equazione $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 0$, contenute nell'intervallo $[0, 2\pi]$, è

    (**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3

19. Un rombo, le cui diagonali misurano d_1 e d_2, è inscrivibile in una circonferenza quando...

    (**A**) $d_1 = 2$ e $d_2 = 2$

    (**B**) $d_1 = 2$ e $d_2 = 3$

    (**C**) $d_1 = 2$ e $d_2 = 4$

    (**D**) $d_1 = 3$ e $d_2 = 4$

20. Per quali valori di λ l'equazione $x^4 - 3x^2 + \lambda = 0$ ha quattro soluzioni *reali distinte*?

    (**A**) Per nessun valore di λ

    (**B**) Se e solo se $\lambda < \dfrac{9}{4}$

    (**C**) Se e solo se $0 < \lambda < \dfrac{9}{4}$

    (**D**) Se e solo se $0 < \lambda$

Università di Pisa - Facoltà di Ingegneria

Test d'ingresso di Matematica - **ESEMPIO n.2**

1. $1000^{1000} =$

   (**A**) 10^{1003} (**B**) 10^{3000} (**C**) 100^{10000} (**D**) 10^{30000}

2. $\log_3(35) - \log_3(12) =$

   (**A**) $\log_3\left(\dfrac{35}{12}\right)$ (**B**) $\log_3(23)$ (**C**) $\log_3\left(\sqrt[12]{35}\right)$ (**D**) $\log_3\left(35^{12}\right)$

3. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} =$

   (**A**) $\sqrt{12}$ (**B**) $\sqrt[4]{12}$ (**C**) $\sqrt[4]{35}$ (**D**) $\sqrt{35}$

4. $\cos 240° =$

   (**A**) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (**B**) $-\dfrac{1}{2}$ (**C**) $\dfrac{1}{2}$ (**D**) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5. Siano $f(x) = x^3$, $g(x) = \operatorname{sen} x$, $h(x) = |x|$. Allora $f(g(h(x)))$ è uguale a

   (**A**) $\operatorname{sen}^3 |x|$ (**B**) $\operatorname{sen}(|x|^3)$ (**C**) $|\operatorname{sen}(x^3)|$ (**D**) $|\operatorname{sen}(x)|^3$

6. Se $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ e $x \in \left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$, quanto vale x ?

   (**A**) $\dfrac{5\pi}{6}$ (**B**) $\dfrac{2\pi}{3}$ (**C**) $\dfrac{\pi}{2}$ (**D**) π

7. La negazione dell'enunciato "Nessuna matricola di ingegneria è in grado di pensare" è

   (**A**) "Tutte le matricole di ingegneria sono in grado di pensare"

   (**B**) "Almeno una matricola di ingegneria è in grado di pensare"

   (**C**) "Tutte le matricole di ingegneria non sono in grado di pensare"

   (**D**) "Almeno una matricola di ingegneria non è in grado di pensare"

8. Determinare per quale valore del parametro a la retta di equazione $y = 2x+3$ e la retta di equazione $ax + 2y + 5 = 0$ sono parallele.

   (**A**) 1 (**B**) -4 (**C**) 4 (**D**) 2

9. $2^{(\log_2 9+3)} =$

   (**A**) 8 (**B**) 72 (**C**) 27 (**D**) 3

10. Qual è il raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 9$?

    (**A**) 3 (**B**) 9 (**C**) $\sqrt{10}$ (**D**) 1

11. Qual è il resto della divisione $(x^5 + 3x^2 - x) : (x^2 + 3)$?

    (**A**) $8x - 9$ (**B**) $8x + 9$ (**C**) $-x$ (**D**) $2x$

12. Nel triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa BC è lunga 13 ed il cateto AB è lungo 12. Quanto vale la tangente dell'angolo $\widehat{B}$?

    (**A**) $\frac{5}{13}$ (**B**) $\frac{5}{12}$ (**C**) $\frac{12}{13}$ (**D**) $\frac{12}{5}$

13. La disequazione $\log_3(x + 2) \leq 2$ ha come soluzione

    (**A**) $0 \leq x \leq 7$ (**B**) $0 < x \leq 7$ (**C**) $-2 < x \leq 7$ (**D**) $x \leq 7$

14. Quale delle seguenti equazioni ha il maggior numero di soluzioni *reali distinte* ?

    (**A**) $x + 2 = 3x + 7$

    (**B**) $x^2 + 2x + 8 = 0$

    (**C**) $x^2 + 3x - 8 = 0$

    (**D**) $x^3 - 8 = 0$

15. Sono date la circonferenza C_1 di equazione $\{(x-1)^2 + y^2 = 0\}$ e la circonferenza C_2 di equazione $\{x^2 + (y-2)^2 = 9\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

    (**A**) C_1 è tangente a C_2

    (**B**) C_1 interseca C_2 in due punti distinti

    (**C**) C_1 interseca C_2 in tre punti distinti

    (**D**) C_1 non interseca C_2

16. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} =$

    (**A**) $\sqrt[5]{6}$ (**B**) $\sqrt[6]{5}$ (**C**) $\sqrt[6]{72}$ (**D**) $\sqrt[6]{6}$

17. Il numero di soluzioni *reali distinte* dell'equazione $|x-3| + |x| = 4$ è

    (**A**) 0 (**B**) 1 (**C**) 2 (**D**) 3

18. Siano a e b numeri reali positivi. Allora

$$\left(\sqrt[12]{a} - \sqrt[12]{b}\right) \cdot \left(\sqrt[12]{a} + \sqrt[12]{b}\right)$$

    è uguale a

    (**A**) $a - b$ (**B**) $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$ (**C**) $\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}$ (**D**) $a + b$

19. La disequazione $\operatorname{tg} x > 2 \operatorname{sen} x$ ha come soluzione, nell'intervallo $[0, 2\pi]$,

    (**A**) l'insieme vuoto

    (**B**) un intervallo

    (**C**) l'unione di due intervalli disgiunti

    (**D**) l'unione di tre intervalli disgiunti

20. Ciascuno dei quattro cartoncini

$$\boxed{\text{A}} \qquad \boxed{\text{B}} \qquad \boxed{1} \qquad \boxed{2}$$

reca su una faccia una lettera e sull'altra faccia un intero. Determinare il minimo numero di cartoncini che bisogna girare per essere sicuri che i cartoncini siano stati preparati attenendosi alla regola seguente: "Se una faccia reca una vocale, allora l'altra faccia reca un intero pari".

(**A**) 1 (**B**) 2 (**C**) 3 (**D**) 4