UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 29/1/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Per quali t razionali il numero $\left(7+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-t\sqrt{2}\right)$ è razionale?

2. Calcolare $[8e_1+5e_2-2e_3]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B}=(5e_1+e_2,\ 2e_1-e_3,\ e_2-e_3)$.

3. Data $h:\{z\in\mathbb{C}^6:\ 3z_1+iz_4+(1-i)z_6=0\}\to\mathbb{C}^{10}$ lineare né nulla né iniettiva, stabilire che dimensione può avere un sottospazio $Z\subseteq\mathbb{C}^{10}$ tale che $\mathbb{C}^{10}=Z\oplus\mathrm{Im}(h)$.

4. Risolvere $\begin{cases} 2x-y+3z=1\\ x+4y-2z=5\\ 3x-6y+8z=-3.\end{cases}$

5. Data $f:\mathbb{R}^2\to\{x\in\mathbb{R}^3:\ 4x_1-x_2+3x_3=0\}$ lineare con $f\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\11\\1\end{pmatrix}$, provare che f è invertibile e trovare $f^{-1}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$.

6. Posto $X=\{x\in\mathbb{R}^3:\ x_1+x_2+x_3=0\}$ calcolare il determinante di $f:X\to X$ data da $f(x)=\begin{pmatrix}-2x_1+2x_2+6x_3\\ -3x_2-4x_3\\ 5x_1+4x_2+x_3\end{pmatrix}$.

7. Posto $X=\mathrm{Span}(-e_1+3e_2+3e_3,\ -e_2)$ e $Y=\mathrm{Span}(2e_1+7e_2-4e_3+e_4,\ e_2+3e_3)$, trovare la proiezione su X di $5e_1-e_3+e_4$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^4=X\oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 29/1/16 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare il sottospazio W di equazione $12x-15y+20z=0$.

(A) (2 punti) Esibire tutti i vettori di W aventi una componente nulla e le altre due intere e prime tra loro, di cui positiva quella con indice minore.

(B) (3 punti) Disporre i vettori così trovati in modo che sia crescente la terza componente, ed estrarne una base $\mathcal{B}$ di W.

(C) (3 punti) Provare che aggiungendo a $\mathcal{B}$ il vettore $2e_1+3e_2+e_3$ si trova una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

(D) (4 punti) Posto $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ trovare la prima colonna della matrice $[f_M]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$.

2. Al variare di $s,t\in\mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_s:\begin{cases}(s+1)x-2y+(s+3)z=s-1\\(1-2s)x+(s-2)y-12z=-6\end{cases}\qquad F_t=\begin{pmatrix}2\\-t\\1\end{pmatrix}+\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}t+2\\2\\-t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3t+5\\5-t\\12\end{pmatrix}\right).$$

(A) (2 punti) Determinare s_0,h_0,h tali che E_s ha dimensione h_0 per $s=s_0$ e dimensione h altrimenti.

(B) (2 punti) Determinare t_0,k_0,k tali che F_t ha dimensione k_0 per $t=t_0$ e dimensione k altrimenti.

(C) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di E_s per $s=1$ e per $s=s_0$.

(D) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_t per $t=-1$ e per $t=t_0$.

(E) (2 punti) Stabilire per quali t si ha che F_t è parallelo a E_0, ovvero a E_s per $s=0$.

Risposte

5. ♡

1. $t = \frac{3}{7}$

2. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Tra 6 e 9 estremi compresi

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

5. $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix}$

6. 8

7. $3e_1 - 11e_2 - 9e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(B) L'ordine è il precedente; si scarta il terzo vettore

(C) La matrice corrispondente ha determinante -1

(D) $\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -13 \end{pmatrix}$

2.

(A) $s_0 = 5,\ h_0 = 2,\ h = 1$

(B) $t_0 = -3,\ k_0 = 1,\ k = 2$

(C) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(D) $9x - 5y + z = 14; \quad \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x + z = 7 \end{cases}$

(E) $t = \frac{8}{5}$