UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 28/6/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Se un polinomio ax^2+x+c con c razionale ha una radice razionale, si può concludere che è razionale anche l'altra radice? Spiegare.

2. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0\}$ e $v = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$, provare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ è base di X e che v appartiene a X, quindi calcolare $[v]_{\mathcal{B}}$.

3. Stabilire se esistano applicazioni lineari iniettive e/o surgettive $f : \{p(w) \in \mathbb{C}_{\leqslant 7}[w] : \ p(1) = p'(-1) = 0\} \to \{z \in \mathbb{C}^6 : \ iz_1 + 5z_3 + z_6 = 0\}$. Spiegare.

4. Risolvere $\begin{cases} 3x + 5y - 4z = 0 \\ 10x + 21y - 23z = -15 \\ 2x - y + 7z = 15. \end{cases}$

5. Dati $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, provare che f è iniettiva e che $v \in \mathrm{Im}(f)$ e calcolare $f^{-1}(v)$.

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Posto $\mathcal{S}_3 = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \ {}^{\mathrm{t}}X = X\}$ e $\mathcal{A}_3 = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \ {}^{\mathrm{t}}X = -X\}$ calcolare la proiezione su $\mathcal{S}_3$ di $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_3 \oplus \mathcal{A}_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 28/6/16 — Esercizî

1. Considerare $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0\}$,

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^4 : \ 4y_1 + 10y_2 - 6y_3 + 9y_4 = 0\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Trovare tutti i vettori di X con due sole coordinate non nulle, intere e prime fra loro, di cui la prima positiva; ordinare tali vettori in modo che la somma delle coordinate sia crescente, ed estrarne una base $\mathcal{B}$ di X.

(B) (4 punti) Trovare tutti i vettori di Y con due sole coordinate non nulle, intere e prime fra loro, di cui la prima positiva; ordinare tali vettori in modo che la quantità $|y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4|$ sia crescente, ed estrarne una base $\mathcal{C}$ di Y.

(C) (3 punti) Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to Y$.

(D) (3 punti) Determinare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

2. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ i seguenti sottospazî affini:

$$E_t : \begin{cases} (t-2)x - ty + (3-t)z + (t-4)w = t-3 \\ (4-2t)x + (t+5)y + (t-1)z + (3-t)w = 11-3t \end{cases}$$

$$F_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s \\ 7 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2+s \\ 2-2s \\ 5s \\ -2s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4+s \\ 7-5s \\ 11s-4 \\ 1-5s \end{pmatrix} \right).$$

(A) (2 punti) Trovare $n_0, n_1 \in \mathbb{N}, t_0 \in \mathbb{R}$ per cui $\dim(E_t) = n_0$ per $t = t_0$ e $\dim(E_t) = n_1$ per $t \neq t_0$.

(B) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t = 3$ e per $t = t_0$.

(C) (2 punti) Trovare $m_0, m_1 \in \mathbb{N}, s_0 \in \mathbb{R}$ per cui $\dim(F_s) = m_0$ per $s = s_0$ e $\dim(F_s) = m_1$ per $s \neq s_0$.

(D) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_s per $s = 1$ e per $s = s_0$.

(E) (4 punti) Descrivere la posizione reciproca di E_t per $t = 1$ ed F_s per $s = 2$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. No, ad esempio $-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot x^2 + x$ ha le radici 0 e $\sqrt{2}$

2. X ha dimensione 2 e $\mathcal{B}$ consiste di due vettori linarmente indipendenti che gli appartengono; v soddisfa l'equazione di X; $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. Il dominio ha dimensione 6 e il codominio ha dimensione 5: esistono f surgettive ma non iniettive

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -31 \\ 29 \\ 13 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

6. -4

7. $\begin{pmatrix} 4 & 7/2 & -3/2 \\ 7/2 & 1 & 5 \\ -3/2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1.

(A) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; scartare l'ultimo

(B) $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$; scartare gli ultimi tre

(C) $(4, 10, -6, 9) \cdot A = (2, -6, 3)$

(D) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

2.

(A) $n_0 = 3,\ n_1 = 2,\ t_0 = 5$

(B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$; $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$

(C) $m_0 = 1,\ m_1 = 2,\ s_0 = -1$

(D) $\begin{cases} 5x + z = 4 \\ 5y + 4z = 6 \\ 2z + 5w = 33 \end{cases}$; $\quad \begin{cases} -5x + 2y + 3z = 2 \\ 3y + 2z + 5w = 43 \end{cases}$

(E) Sono disgiunti e le loro giaciture hanno in comune la retta generata da $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$