UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

IN SUPREMÆ DIGNITATIS · 1343 ·

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 19/7/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 4 vettori linearmente indipendenti in $\{z \in \mathbb{C}^9 : 3z_1 + iz_7 = (1+i)z_4 + (3-i)z_9 = 0\}$ quanti aggiungerne per avere una base?

2. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ e $f : X \to X$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \\ -4x_1 + x_3 \end{pmatrix}$, trovare $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$.

3. Se $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^8$ è lineare e non iniettiva, che dimensione può avere la sua immagine?

4. Risolvere $\begin{cases} 3x - 2y + z = 18 \\ 2x + 5y + 4z = 29 \\ -2x + y + 4z = 21. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{3\,2}$.

6. In una matrice 2×2 un coefficiente vale $\sqrt{2}$ e tutti gli altri sono interi non nulli.
Può il determinante essere nullo? Spiegare.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; -7x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(2e_1 + e_2 + 9e_3)$, calcolare la proiezione su X di $3e_1 - 6e_2 + 2e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio affine

$$E = \begin{pmatrix} k-2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} k-1 \\ k+5 \\ k-11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4-2k \\ -3k \\ k+4 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (4 punti) Trovare $k_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tali che $\dim(E_{k_0}) = n_0$ e $\dim(E_k) = n_1$ per $k \neq k_0$.

(B) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_k per $k = -1$ e per $k = k_0$.

(C) (4 punti) Al variare di k discutere la posizione di E rispetto alla retta F generata da $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Considerare $X = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leqslant 3}[t] : \ p'(-1) = 0\}$ e $v(t) = 4 - t - 5t^2 - 3t^3$.

(A) (1 punto) Provare che $v(t) \in X$.

(B) (1 punto) Provare che $1 \in X$ mentre $t^k \notin X$ per $k > 1$.

(C) (3 punti) Esibire tutti i vettori di X della forma $a \cdot t^k + b \cdot t^h$ con a, b interi non nulli primi fra loro, $a > 0$ e $0 \leqslant k < h \leqslant 3$.

(D) (3 punti) Ordinare i polinomi $p(t)$ trovati al punto precedente in modo che sia crescente la quantità $p(1)$, quindi aggiungere 1 in fondo alla lista trovata ed estrarre una base di X.

(E) (4 punti) Dette $\mathcal{B}$ la base del punto precedente e $f : X \to X$ l'applicazione lineare tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare $f(v(t))$.

Risposte

5. ♡

1. 3

2. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. Tra 0 e 3 compresi

4. $x = 3,\ y = -1,\ z = 7$

5. $\frac{5}{7}$

6. No, il determinante vale $n + m\sqrt{2}$ con n e m interi non nulli; se fosse nullo avremmo che $\sqrt{2} = -\frac{n}{m}$ sarebbe razionale

7. $5e_1 - 5e_2 + 11e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $k_0 = 5,\ n_0 = 1,\ n_1 = 2$

(B) $-8x + 11y + 5z = 45;$ $\begin{cases} 3x + 2z = 13 \\ 3y + 5z = 13 \end{cases}$

(C) Paralleli per $k = 3$, rette sghembe per $k = 5$, altrimenti incidenti in un punto

2.

(A) $v'(-1) = -1 + 10 - 9 = 0$

(B) $1' \equiv 0$; $(t^k)'(-1) = k(-1)^{k-1} \neq 0$

(C) $2t + t^2,\ 3t - t^3, 3t^2 + 2t^3$

(D) $3t - t^3,\ 2t + t^2,\ 3t^2 + 2t^3,\ 1$; scartare il terzo.

(E) $7 + 31t - t^2 - 11t^3$