Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 9/9/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Applicare il procedimento di estrazione di una base al seguente sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$:
$0,\ e_1 - \sqrt{3}e_2 + \sqrt{6}e_3,\ -\sqrt{3}e_1 + 3e_2 - 3\sqrt{2}e_3,\ e_2 - \sqrt{2}e_3,\ 7e_1,\ 0,\ e_1 + e_2 + e_3,\ \pi e_1 + 19e_2 - \sqrt{5}e_3.$

2. Determinare $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 18 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}}$ dove $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}\right)$.

3. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^9 : x_3 = 6x_7\}$ e $f : X \to \mathbb{R}^4$ lineare non surgettiva,
se $X = Y \oplus \mathrm{Ker}(f)$, che dimensione può avere Y?

4. Risolvere $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 9 \\ 2x - y - 3z = 11 \\ 6x + 5y + 2z = 6. \end{cases}$

5. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Se in $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ una sottomatrice 2×2 ha determinante non nullo e due sue orlate hanno determinante nullo, quanto può valere il rango di A?

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x_1 + x_2 = x_3 + x_4\}$, $v = 2e_1 + 3e_2 + 7e_3 - 2e_4$, $Y = \mathrm{Span}(e_1 - e_2, e_3 - e_4)$, $Z = \mathrm{Span}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, provare che $v \in X$ e che $X = Y \oplus Z$, quindi determinare la proiezione di v su Y rispetto a questa decomposizione.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 9/9/16 — Esercizî

1. Considerare il sottospazio X di $\mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

(A) (4 punti) Determinare la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ di X in cui v_1 ha prima componente nulla, v_2 ha ultima componente nulla, e sia in v_1 sia in v_2 le componenti sono intere, prime fra loro e con somma positiva.

(B) (4 punti) Se $f : X \to X$ è l'applicazione lineare tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$,
calcolare $f(-5e_1 + 6e_2 + 8e_3 + 5e_4)$.

(C) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane del sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ parallelo a X e passante per $7e_1 + 2e_2 - e_3 - 17e_4$.

2. Considerare le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Calcolare A^{-1}.

(B) (3 punti) Calcolare il rango di B.

(C) (3 punti) Posto $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_2 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{I}_2 & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}$ calcolare il rango di C.

(D) (3 punti) Sapendo che $\mathrm{Ker}(B)$ e $\mathrm{Im}(C)$ hanno intersezione $\{0\}$, provare che $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker}(B) \oplus \mathrm{Im}(C)$.

Risposte

5. ♢

1. Scartare primo, terzo, quinto, sesto, ottavo

2. $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Tra 0 e 3 compresi

4. $x = 3,\ y = -2,\ z = -1$

5. -11

6. Tra 2 e 4 compresi

7. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1.

(A) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ -10 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 21 \\ 23 \\ 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} -10 \\ 39 \\ 37 \\ -20 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$

2.

(A) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

(B) 2

(C) 2

(D) Hanno entrambi dimensione 2, dunque se hanno intersezione $\{0\}$ allora hanno somma $\mathbb{R}^4$