UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 21/7/15 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Calcolare il polinomio caratteristico di $f : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ data da
$f(p(x)) = p(-3) - 2p(-2) \cdot x + p(1) \cdot x^2 - x \cdot p'(x)$.

2. Se $A \in \mathcal{M}_{9\times 9}(\mathbb{C})$ non è diagonalizzabile e ha tre autovalori distinti di molteplicità algebriche rispettivamente 2, 3 e 4, quanto può valere la somma delle loro molteplicità geometriche?

3. In $\mathbb{C}^2$ determinare tutti i vettori unitarî, con prima componente reale e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-3i \\ 1-5i \end{pmatrix}$.

4. Per quali a esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}$?

5. Determinare il tipo affine della quadrica $2x^2 + 6y^2 - 4z^2 - 4xz - 2x + 4y + 16z - 4 = 0$.

6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t+1 : t+2 : -2t]$ appartiene alla retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[3 : 2 : -1]$ e $[1 : -4 : 9]$.

7. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ sia esatta la forma $\mathrm{e}^{4x^3y+3x^2y^2} \cdot \Big((12x^2y + kxy^2)\, \mathrm{d}x + (4x^3 + 6x^2y)\, \mathrm{d}y \Big)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 21/7/15 — Esercizî

1. Considerare la matrice $A = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 72 & -50 & 3 \\ -22 & 18 & -54 \\ 45 & 30 & 8 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $u_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A, e calcolare il relativo autovalore λ_1.
Sapendo che $\det(A) = 2$ calcolare poi gli altri due autovalori, verificando che non sono reali.

(B) (3 punti) Provare che A trasforma il sottospazio $Z = u_1^\perp$ in sé stesso.

(C) (2 punti) Provare che $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ appartiene a Z e completarlo a una base ortogonale $\mathcal{B} = (u_2,\ u_3)$ di Z in modo che $\|u_2\| = \|u_3\|$.

(D) (2 punti) Se $g : Z \to Z$ è data da $g(w) = A \cdot w$ per ogni $w \in Z$, trovare $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(E) (2 punti) Dedurre dal punto precedente una descrizione geometrica dell'azione di A.

2. Considerare la curva $\beta(s) = \begin{pmatrix} s^2 - 4s - \log(2s+1) \\ 1 - 2s + 2s^2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Determinare il più grande insieme I su cui l'espressione di β ha senso, e provare che $\beta : D \to \mathbb{R}^2$ è regolare.

(B) (2 punti) Calcolare la curvatura di β nel punto $\beta(0)$.

(C) (3 punti) Al variare di $s \in I$ determinare il segno della curvatura di β nel punto $\beta(s)$.

Indicare ora con γ la restrizione di β a $[0, 2]$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\gamma e^{x+y}(\,dx + \,dy)$.

(E) (2 punti) Calcolare $\int_\gamma \left(y - \frac{5}{2}\right) \,dx$.

Risposte

5. ♡

1. $t^3 - 3t^2 - 8t + 10$

2. Tra 3 e 8 compresi

3. $\pm\frac{1}{13\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 26 \\ 7i - 17 \end{pmatrix}$

4. $a = \pm\sqrt{35}$

5. Iperboloide a due falde

6. $t = 3$

7. $k = 6$

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\lambda_1 = 2$; $\lambda_{2,3} = \pm i$

(B) Una base di Z è data da $z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $z_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, si ha

$$A \cdot z_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 15 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot z_3 = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e si verifica subito che $(6,\ -3,\ 2) \cdot A \cdot z_2 = (6,\ -3,\ 2) \cdot A \cdot z_3 = 0$

(C) $u_3 = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$

(E) Si tratta di una rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ sul piano Z composta con un'omotetia di ragione 2 sulla retta $Z^\perp$

2.

(A) $I = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
La seconda componente di $\beta'(s)$ si annulla solo per $s = \frac{1}{2}$, ma in tale punto la prima vale -4

(B) $-\frac{3}{20\sqrt{10}}$

(C) Positiva per $-\frac{1}{2} < s < -\frac{1}{6}$; nulla per $s = -\frac{1}{6}$; negativa per $s > -\frac{1}{6}$

(D) $-\frac{4}{5}e$

(E) 8