UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 21/7/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Calcolare il polinomio caratteristico di $f : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x]$ data da $f(p(x)) = p(-2) - 2p(3) \cdot x + p(-1) \cdot x^2 + x \cdot p'(x)$.

2. Se $A \in \mathcal{M}_{7\times 7}(\mathbb{C})$ non è diagonalizzabile e ha due autovalori distinti di molteplicità algebriche rispettivamente 3 e 4, quanto può valere la somma delle loro molteplicità geometriche?

3. In $\mathbb{C}^2$ determinare tutti i vettori unitarî, con prima componente reale e ortogonali a $\begin{pmatrix} 3-2i \\ 1+4i \end{pmatrix}$.

4. Per quali a esiste $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

5. Determinare il tipo affine della quadrica $2x^2 + 9y^2 + 5z^2 + 2xz - 2x - 8y - 8z = 0$.

6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t+2 : 2t-1 : 1-t]$ appartiene alla retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[5:2:4]$ e $[6:1:9]$.

7. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ sia esatta la forma $\mathrm{e}^{2x^2y^2+3xy^3} \cdot \Big((4xy^2 + 3y^3)\,\mathrm{d}x + (kx^2y + 9xy^2)\,\mathrm{d}y \Big)$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 21/7/15 — Esercizî

1. Considerare la matrice $A = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -8 & 45 & 30 \\ 3 & -72 & 50 \\ -54 & 22 & -18 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A, e calcolare il relativo autovalore λ_1.
Sapendo che $\det(A) = -2$ calcolare poi gli altri due autovalori, verificando che non sono reali.

(B) (3 punti) Provare che A trasforma il sottospazio $W = v_1^\perp$ in sé stesso.

(C) (2 punti) Provare che $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene a W e completarlo a una base ortogonale $\mathcal{B} = (v_2,\ v_3)$ di W in modo che $\|v_2\| = \|v_3\|$.

(D) (2 punti) Se $g : W \to W$ è data da $g(w) = A \cdot w$ per ogni $w \in W$, trovare $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

(E) (2 punti) Dedurre dal punto precedente una descrizione geometrica dell'azione di A.

2. Considerare la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4t - \log(2t+1) \\ 1 + 2t - 2t^2 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Determinare il più grande insieme D su cui l'espressione di α ha senso, e provare che $\alpha : D \to \mathbb{R}^2$ è regolare.

(B) (2 punti) Calcolare la curvatura di α nel punto $\alpha(0)$.

(C) (3 punti) Al variare di $t \in D$ determinare il segno della curvatura di α nel punto $\alpha(t)$.

Indicare ora con β la restrizione di α a $[0, 2]$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta e^{y-x}(-\,dx + \,dy)$.

(E) (2 punti) Calcolare $\int_\beta \left(y + \frac{1}{2}\right) dx$.

Risposte

5. ♢

1. $t^3 + t^2 - 43t - 19$

2. Tra 2 e 6 compresi

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{510}}\begin{pmatrix} 17 \\ 5-14i \end{pmatrix}$

4. $a = \pm\sqrt{30}$

5. Ellissoide

6. $t = 2$

7. $k = 4$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\lambda_1 = -2$; $\lambda_{2,3} = \pm i$

(B) Una base di W è data da $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, si ha

$$A \cdot w_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ -20 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot w_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e si verifica subito che $(2,\ -6,\ 3) \cdot A \cdot w_2 = (2,\ -6,\ 3) \cdot A \cdot w_3 = 0$

(C) $v_3 = \pm \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{pmatrix}$

(E) Si tratta di una rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ sul piano W composta con un'omotetia di ragione -2 sulla retta $W^{\perp}$

2.

(A) $D = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
La seconda componente di $\alpha'(t)$ si annulla solo per $t = \frac{1}{2}$, ma in tale punto la prima vale -4

(B) $\frac{3}{20\sqrt{10}}$

(C) Negativa per $-\frac{1}{2} < t < -\frac{1}{6}$; nulla per $t = -\frac{1}{6}$; positiva per $t > -\frac{1}{6}$

(D) $4e$

(E) -8