Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 11/9/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 16 & 9 \\ -26 & -15 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. In $\mathbb{R}^3$ trovare tutti i vettori unitari ortogonali al piano Span $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

3. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t+1 : 2 : 2-t : 0]$ appartiene al piano di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per i punti $[1 : 2 : 0 : -1]$, $[0 : 1 : 1 : 0]$ e $[3 : 1 : 0 : 1]$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica $(t+1)x^2 + 2(t-8)xy + 2(t+4)y^2 - x + 2y = 0$ sia una parabola.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $3x^2 + 3y^2 + 6z^2 + 2xy - 8yz + 4y = 0$.

6. Determinare i segni degli autovalori della matrice hessiana nel punto $(0,0)$ per la funzione $f(x,y) = \log(1 + x^2 + xy - 3y^2)$.

7. Calcolare $\int_\alpha \omega$ dove $\omega(x,y) = \left(e^{-3x^7} - y\right)\,\mathrm{d}x + (x + \cos(1 + y - y^2))\,\mathrm{d}y$ e $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = (3\cos(t), 2\sin(t))$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 11/9/15 — Esercizî

1. Considerare le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 9 & -10 & 6 \\ 10 & -10 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad S = M + {}^{\mathrm{t}}M, \quad C = \frac{1}{3}\left(S + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & -1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \quad A = M - {}^{\mathrm{t}}M.$$

(A) (3 punti) Provare che M ha un solo autovalore λ reale ed esibire un relativo autovettore v.

(B) (2 punti) Provare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di S, e che lo stesso avviene per C.

(C) (4 punti) Determinare gli autovalori di C e una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

(D) (3 punti) Per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste $U \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che $U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} \sin(\pi \cdot s) \\ 1 - 2s + s^2 - s^3 \\ \frac{s}{2+s^2} - s^2 \end{pmatrix}$ e la sua restrizione β a $[0, 1]$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (4 punti) Calcolare la curvatura e la torsione di α nel punto $\alpha(0)$.

(C) (4 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $\alpha(0)$.

(D) (2 punti) Calcolare $\int_\beta \mathrm{e}^{y^3 - z}(3y^2\,\mathrm{d}y - \,\mathrm{d}z)$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♢

1. $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -2;\ v_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{374}}\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ -17 \end{pmatrix}$

3. $t = 3$

4. $t = -28$

5. Paraboiloide ellittico

6. Uno positivo e uno negativo

7. 12π

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $p_M(t) = (t-2)(t^2 - t + 2)$; $\lambda = 2,\ v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(B) S e C sono simmetriche

(C) $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = \sqrt{29} - 2,\ \lambda_2 = -\sqrt{29} - 2$
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{29} - 5 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{29} + 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(D) $a = \pm\sqrt{509}$

2.

(A) La seconda componente di $\alpha'(t)$ è sempre negativa.

(B) $\kappa = \frac{8\sqrt{9+8\pi^2}}{\left(\sqrt{17+4\pi^2}\right)^3},\ \tau = -\frac{3\pi(5+\pi^2)}{9+8\pi^2}$

(C) $t = \frac{1}{\sqrt{17+4\pi^2}} \begin{pmatrix} 2\pi \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix},\ n = \frac{1}{\sqrt{32\pi^4+172\pi^2+153}} \begin{pmatrix} 10\pi \\ 4\pi^2 - 3 \\ -4\pi^2 - 12 \end{pmatrix},\ b = \frac{1}{\sqrt{9+8\pi^2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2\pi \\ 2\pi \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}} - \mathrm{e}$