Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 9/6/15 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ trovare $p_A(t)$ e gli autovalori di A sapendo che $\det(A) = -180$, $\operatorname{tr}(A) = 11$ e $p_A(-1) = 240$.

2. Calcolare $\int_\alpha \omega$ dove $\omega(x,y) = \frac{6x^2\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y}{1+2x^3+y^2}$ e $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2+t^3 \\ 3t^4 \end{pmatrix}$.

3. Trovare per ogni $t \in \mathbb{R}$ il segno in $\alpha(t)$ della curvatura di $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 6t \\ t^3 + 2t^2 \end{pmatrix}$.

4. Se $A, M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ sono matrici ortogonali, vale l'uguaglianza $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ e si sa che $\det(A) = -1$ e $\operatorname{tr}(A) = 0$, quanto valgono ϑ e ε?

5. Determinare il tipo affine della quadrica $5x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xz - 6yz + 8y = 0$.

6. Determinare il riferimento di Frénet nel punto $\alpha(0)$ della curva $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + 2s^2 + s^3 \\ -s + s^2 + 3s^3 \\ 2s - s^2 - s^3 \end{pmatrix}$.

7. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[2 : t-2 : 5]$ appartiene alla retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[1 : 2 : 3]$ e $[3 : -10 : t+9]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 9/6/15 — Esercizî

1. Al variare di $s \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_s = \begin{pmatrix} 49 & -2s & -1-s^2 \\ s^2-8 & -2 & -16 \\ 5s+3 & -16 & s^3+17 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Stabilire per quali s esista una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza A_s.

Indicare d'ora in poi con A la matrice A_s per il valore di s appena trovato.

(B) (2 punti) Sapendo $p_A(-1) = 2915$ e che A ha l'autovalore $\lambda_1 = 0$, trovare gli altri due (che sono interi); indicare tali autovalori con λ_2 e λ_3 in modo che $\lambda_2 < \lambda_3$.

(C) (3 punti) Trovare autovettori v_2 e v_3 di A relativi agli autovalori λ_2 e λ_3. (Nel fare il calcolo fare attenzione alle equazioni da usare e alle possibili semplificazioni; si otterranno comunque valori piuttosto grandi delle componenti, che però poi si possono ridurre a valori piccoli.) Partendo da v_2 e v_3 esibire quindi una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

(D) (3 punti) Esibire la matrice P della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul piano generato da v_2 e v_3.

(E) (2 punti) Provare che P soddisfa le proprietà caratterizzanti delle matrici delle proiezioni ortogonali.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3k^2-2k+2 & 3k^2-k+1 & -4k^2+5k-1 \\ -5 & -k-4 & 9-k \\ 2k^2-2k-4 & 2k^2-2k-4 & -3k^2+4k+9 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Provare che $\det(A_k) = k^5 - 3k^4 - 2k^3 + 2k^2 - 3k + 5$.

(B) (3 punti) Sapendo che A_k ha sempre l'autovalore $5 + 2k - k^2$ trovare gli altri due.

(C) (3 punti) Al variare di k in $\mathbb{R}$ determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di A_k.

(D) (4 punti) Al variare di k in $\mathbb{R}$ determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di A_k, deducendone la diagonalizzabilità o meno di A_k.

Risposte

5. ♡

1. $p_A(t) = t^3 - 11t^2 - 72t + 180$; $\lambda_{1,2,3} = -6, 2, 15$

2. $\ln(26) = \ln(2) + \ln(13)$

3. Negativa per $t < -2$ e per $t > -1$, positiva per $-2 < t < -1$, nulla per $t = -2$ e per $t = -1$

4. $\vartheta = \pm\frac{\pi}{3}$, $\varepsilon = -1$

5. Paraboloide ellittico

6. $t = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{210}}\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

7. $t = -2$ e $t = 8$

Soluzioni

1.

(A) $s = -4$

(B) $\lambda_2 = -54, \quad \lambda_3 = 54$

(C) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 17 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

(E) P è simmetrica e $P \cdot P = P$

2.

(A) Si eseguono nell'ordine queste sostituzioni:
la prima colonna con sé stessa meno la seconda;
la seconda riga con sé stessa più la prima;
la seconda riga con sé stessa meno la terza;
la terza colonna con sé stessa più la seconda.
Si trova allora direttamente $(1-k)(k^2+1)(5+2k-k^2) = k^5 - 3k^4 - 2k^3 + 2k^2 - 3k + 5$

(B) $1-k$ e k^2+1

(C) $1-k,\ k^2+1, 5+2k-k^2$ con m.a. 1 per k diverso da $-1,\ 0,\ 2\ 4$;
2 con m.a. 3 per $k=-1$;
1 con m.a. 2 e 5 con m.a. 1 per $k=0$;
5 con m.a. 2 e -1 con m.a. 1 per $k=2$;
-3 con m.a. 2 e 17 con m.a. 1 per $k=4$

(D) $1-k,\ k^2+1, 5+2k-k^2$ con m.g. 1 per k diverso da $-1,\ 0,\ 2\ 4$; diagonalizzabile
2 con m.g. 2 per $k=-1$; non diagonalizzabile
1 con m.g. 1 e 5 con m.g. 1 per $k=0$; non diagonalizzabile
5 con m.g. 2 e -1 con m.g. 1 per $k=2$; diagonalizzabile
-3 con m.g. 2 e 17 con m.g. 1 per $k=4$; diagonalizzabile