UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 9/6/15 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ trovare $p_A(t)$ e gli autovalori di A sapendo che $\det(A) = 180$, $\mathrm{tr}(A) = -13$ e $p_A(1) = -154$.

2. Calcolare $\int\limits_{\alpha} \omega$ dove $\omega(x,y) = \frac{4x\,\mathrm{d}x + 3y^2\,\mathrm{d}y}{1+2x^2+y^3}$ e $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2+t^3 \\ 3t^4 \end{pmatrix}$.

3. Trovare per ogni $t \in \mathbb{R}$ il segno in $\alpha(t)$ della curvatura di $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 6t \\ t^3 - 2t^2 \end{pmatrix}$.

4. Se $A, M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ sono matrici ortogonali, vale l'uguaglianza $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ e si sa che $\det(A) = +1$ e $\mathrm{tr}(A) = 1 + \sqrt{3}$, quanto valgono ϑ e ε?

5. Determinare il tipo affine della quadrica $-3x^2 + 3y^2 - 8xy + 6xz - 2yz - 10x = 0$.

6. Calcolare curvatura e torsione nel punto $\alpha(0)$ della curva $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + 2s^2 + s^3 \\ -s + s^2 + 3s^3 \\ 2s - s^2 - s^3 \end{pmatrix}$.

7. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t-2 : 3 : 5]$ appartiene alla retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ passante per $[3 : 2 : 1]$ e $[5 : 8 : t+8]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 9/6/15 — Esercizî

1. Al variare di $s \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A_s = \begin{pmatrix} 5 & s^2+2 & 17-s^2 \\ 8-s & -14-s^3 & -16 \\ 5-s & -16 & 10 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Stabilire per quali s esista una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza A_s

Indicare d'ora in poi con A la matrice A_s per il valore di s appena trovato.

(B) (2 punti) Sapendo che $\det(A) = -5488$ e che A ha l'autovalore $\lambda_1 = 28$, trovare gli altri due (che sono interi); indicare tali autovalori con λ_2 e λ_3 in modo che $\lambda_2 < \lambda_3$.

(C) (3 punti) Trovare autovettori v_2 e v_3 di A relativi agli autovalori λ_2 e λ_3. (Nel fare il calcolo fare attenzione alle equazioni da usare e alle possibili semplificazioni; si otterranno comunque valori piuttosto grandi delle componenti, che però poi si possono ridurre a valori piccoli.) Partendo da v_2 e v_3 esibire quindi una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

(D) (3 punti) Esibire la matrice P della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ sul piano generato da v_2 e v_3.

(E) (2 punti) Provare che P soddisfa le proprietà caratterizzanti delle matrici delle proiezioni ortogonali.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3k^2+k-7 & 3k^2-10 & -4k^2-k+10 \\ -2 & k+1 & 2-k \\ 2k^2+k-6 & 2k^2+k-6 & -3k^2-2k+9 \end{pmatrix}.$$

(A) (2 punti) Provare che $\det(A_k) = -k^5 - 4k^4 + 3k^3 + 21k^2 - 27$.

(B) (3 punti) Sapendo che A_k ha sempre l'autovalore $3-k-k^2$ trovare gli altri due.

(C) (3 punti) Al variare di k in $\mathbb{R}$ determinare le molteplicità algebriche degli autovalori di A_k.

(D) (4 punti) Al variare di k in $\mathbb{R}$ determinare le molteplicità geometriche degli autovalori di A_k, deducendone la diagonalizzabilità o meno di A_k.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $p_A(t) = t^3 + 13t^2 + 12t - 180$; $\lambda_{1,2,3} = -10, -6, 3$

2. $\ln(36) = 2\ln(2) + 2\ln(3)$

3. Positiva per $t < 1$ e per $t > 2$, negativa per $1 < t < 2$, nulla per $t = 1$ e per $t = 2$

4. $\vartheta = \pm\frac{\pi}{6}$, $\varepsilon = +1$

5. Paraboloide iperbolico

6. $\kappa = \frac{\sqrt{35}}{3\sqrt{6}}$, $\tau = \frac{33}{35}$

7. $t = 3$ e $t = -\frac{1}{2}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $s = -3$

(B) $\lambda_2 = -14, \quad \lambda_3 = 14$

(C) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{42}\begin{pmatrix} 41 & -5 & 4 \\ -5 & 17 & 20 \\ 4 & 20 & 26 \end{pmatrix}$

(E) P è simmetrica e $P \cdot P = P$

2.

(A) Si eseguono nell'ordine queste sostituzioni:
la prima colonna con sé stessa meno la seconda;
la seconda riga con sé stessa più la prima;
la seconda riga con sé stessa meno la terza;
la terza colonna con sé stessa più la seconda.
Si trova allora direttamente $(k+3)(k^2-3)(3-k-k^2) = -k^5 - 4k^4 + 3k^3 + 21k^2 - 27$

(B) $k+3$ e k^2-3

(C) $k+3,\ k^2-3, 3-k-k^2$ con m.a. 1 per k diverso da $-2,\ 0,\ \frac{3}{2},\ 3$;
1 con m.a. 3 per $k=-2$;
3 con m.a. 2 e -3 con m.a. 1 per $k=0$;
$-\frac{3}{4}$ con m.a. 2 e $\frac{9}{2}$ con m.a. 1 per $k=\frac{3}{2}$;
6 con m.a. 2 e -9 con m.a. 1 per $k=3$

(D) $k+3,\ k^2-3, 3-k-k^2$ con m.g. 1 per k diverso da $-2,\ 0,\ \frac{3}{2},\ 3$; diagonalizzabile;
1 con m.g. 2 per $k=-2$; non diagonalizzabile;
3 con m.g. 2 e -3 con m.g. 1 per $k=0$; diagonalizzabile;
$-\frac{3}{4}$ con m.g. 2 e $\frac{9}{2}$ con m.g. 1 per $k=\frac{3}{2}$; diagonalizzabile;
6 con m.g. 1 e -9 con m.g. 1 per $k=3$; non diagonalizzabile