ETA 30/9/14

$\sigma = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_m) \subset \mathbb{R}^N$ m-simplesso se $v_0, \dots, v_m$ aff. indip

$s(\sigma) = \mathrm{Aff}(v_0, \dots, v_m)$.

Orientazione per $\mathbb{R}$-sp. vett. V = el. $\{\text{basi di } V\} / GL^+(n, \mathbb{R})$

Def: una orientazione di σ è:

(1) una orientaz di $s(\sigma)$, oppure

(2) un ordinamento dei vertici $/ S^+_{n+1}$.

Corrispondenza $(2) \rightsquigarrow (1)$:

se $(v_0, \dots, v_m)$ è ord. pos. dei vertici dichiaro

$(\overrightarrow{v_0 v_1}, \overrightarrow{v_0 v_2}, \dots, \overrightarrow{v_0 v_m})$ una base positiva

E' ben definita: basta vedere ogni trasposizione corrisponde a una matrice di cambio di base con $\det < 0$.

Anzi bastano $(i-1, i)$ $i = 1, \dots, m$:

$(0,1)$: $(v_0, v_1, \dots, v_m) \rightsquigarrow (v_1, v_0, \dots, v_m)$

$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$

$\overrightarrow{v_0v_1}, \overrightarrow{v_0v_2}, \dots, \overrightarrow{v_0v_m} \qquad \overrightarrow{v_1v_0}, \overrightarrow{v_1v_2}, \dots, \overrightarrow{v_1v_m}$

$\overrightarrow{v_1v_0} = -\overrightarrow{v_0v_1}$

$\overrightarrow{v_1v_2} = \overrightarrow{v_0v_2} - \overrightarrow{v_0v_1}$

$\vdots$

$\overrightarrow{v_1v_m} = \overrightarrow{v_0v_m} - \overrightarrow{v_0v_1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \det = -1$$

$(i-1, i)$ $\quad i > 1$ $\quad (v_0, v_1, \dots v_{i-1}, v_i, \dots v_m) \to (v_0, v_1, \dots v_i, v_{i-1}, \dots v_m)$

$\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0v_{i-1}}, \overrightarrow{v_0v_i} \dots \qquad \overrightarrow{v_0v_i}, \overrightarrow{v_0v_{i-1}}$

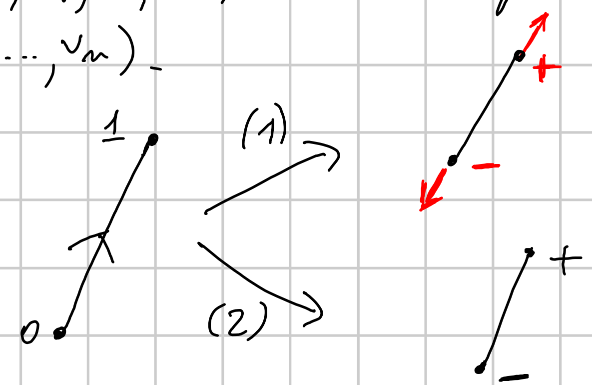
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \det = -1$$

Def: se τ è una faccia di codim 1 di σ simplesso orientato definisco orientazione indotta da σ su τ:

(1) prendo $x \in \tau$, w_1 un vettore in x su $s(\sigma)$ che punta fuori da σ e dichiaro una base $w_2, \dots, w_n$ di $s(\tau)$ positiva se $w_1, \dots, w_n$ è base positiva di $s(\sigma)$; "outer normal first" oppure:

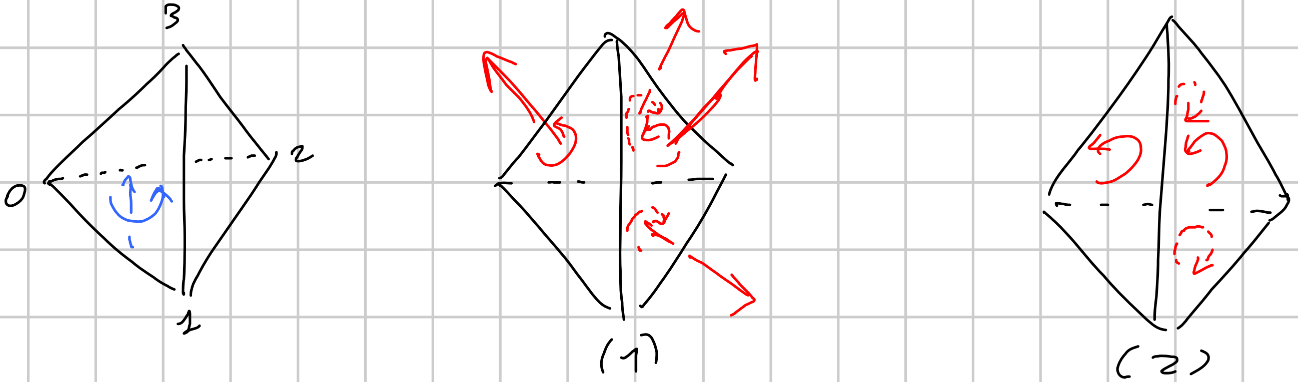
(2) se $(v_0, \dots, v_n)$ è ordinamento positivo dei vertici di σ e $\tau = \overline{Conv(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)}$ dichiaro positivo l'ordinamento $(-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$.

Esempi: $n = 1$



$n=2$

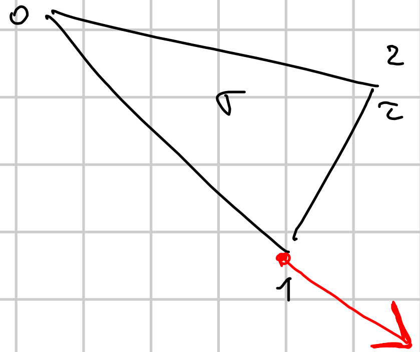
$n=3$



In generale: $\sigma = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_n)$ orientazione $(v_0, \dots, v_n)$

Per faccia opposta al vertice i:

$i = 0$ $\tau = \mathrm{Conv}(v_1, \dots, v_n)$ $\overrightarrow{v_0 v_1}$ è esterno:



(1) $\overrightarrow{v_1v_2}, \dots, \overrightarrow{v_1v_m}$ è positive per $\mathcal{S}(\tau)$ perché $\overrightarrow{v_0v_1}, \overrightarrow{v_1v_2}, \dots, \overrightarrow{v_1v_m}$ è positiva per $\mathcal{S}(\sigma)$, infatti

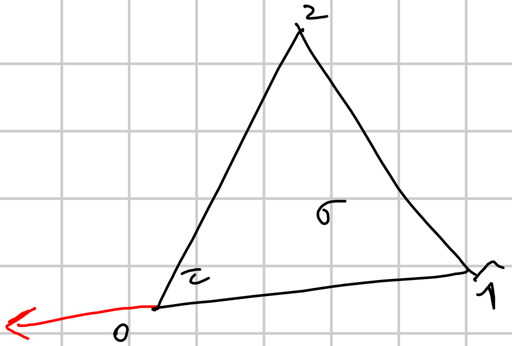
$$\overrightarrow{v_0v_1} = \overrightarrow{v_0v_1}$$
$$\overrightarrow{v_1v_2} = \overrightarrow{v_0v_2} - \overrightarrow{v_0v_1}$$
$$\vdots$$
$$\overrightarrow{v_1v_m} = \overrightarrow{v_0v_m} - \overrightarrow{v_0v_1}$$

so che $\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0v_m}$ è positiva per $\mathcal{S}(\sigma)$ e la matrice di cambio di base è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \det = +1 = (-1)^0.$$

coerente con (2) che dice che $\overrightarrow{v_1v_2}, \dots, \overrightarrow{v_1v_m}$ è positiva.

$i > 0$: $\overrightarrow{v_iv_0} = -\overrightarrow{v_0v_i}$ è un vettore esterno:



la base indotta da $(v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_n)$

è $\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \widehat{\overrightarrow{v_0v_i}}, \dots, \overrightarrow{v_0v_n}$.

Devo confrontare

$\overrightarrow{v_iv_0}, \overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \widehat{\overrightarrow{v_0v_i}}, \dots, \overrightarrow{v_0v_n}$

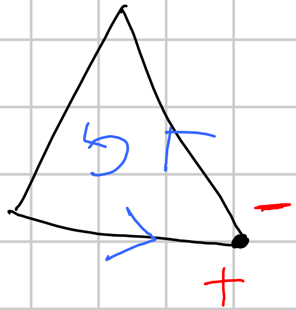
con la base indotta da $v_0, \dots, v_n$

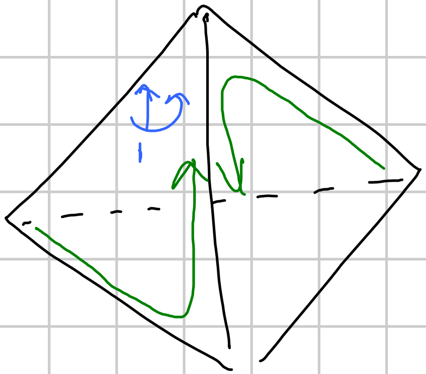
che è $\overrightarrow{v_0v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0v_n}$:

$$\begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & 1 & \\ \vdots & & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

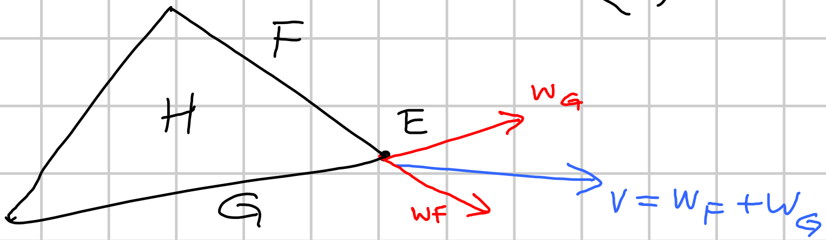
$$\det = (-1)^{i+1} \cdot (-1) \cdot \det(I_{n-1}) = (-1)^i$$

Prop: ogni faccia di codim $= 2$ di un simplesso orientato σ riceve orientazioni opposte dalle due facce di codim $= 1$ di cui è faccia:





Dimo: (1)



w_F / w_G vettore applicato ad E ed esterno a F/G su $s(F) / s(G)$

Fatto $v = w_F + w_G$ è esterno sia a G sia a F su $s(H)$

base $u_2, \dots, u_n$ di $s(E)$ è positiva per :

$H \rightsquigarrow F \rightsquigarrow E$ se $v, w_F, u_2, \dots, u_n$ è pos. su $s(H)$

$H \rightsquigarrow G \rightsquigarrow E$ se $\quad v, w_G, u_2, \dots, u_n$ è pos per $s(H)$

Siccome $v = w_F + w_G$ cioè $w_G = v - w_F$

$\Rightarrow$ matrice di cambio

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & & & \\ 0 & -1 & & & \\ \hline & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \qquad \det = -1$$

(2) $H = (v_0, \dots, v_n)$ orientato

$F = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots v_n)$ orientaz $(-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$

$G = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$ orientaz $(-1)^j (v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$

$(i<j)$

$E = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$ con orientazioni:

da F: $(-1)^i \cdot (-1)^{j-1} (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$

da G: $(-1)^j \cdot (-1)^i (v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$ OPPOSTE

$\boxtimes$

<u>Def</u>: un complesso di catene è $\left(\left(C_n, \partial_n\right)\right)_{n=0}^{+\infty} =: \mathcal{C}$

dove C_n è un gruppo abeliano

e $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ omomorfismo con $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ _

(convenzionalmente $C_{-1} = 0$)

$$\cdots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \cdots \to C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \to 0 \ \cdots$$

la composizione di due $\to$ consec. è 0

<u>Oss</u>: $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \implies \mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subset \mathrm{Ker}(\partial_n)$

$$\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) =: B_n(\mathcal{C}) \qquad \mathrm{Ker}(\partial_n) =: Z_n(\mathcal{C})$$

$B_n(\mathcal{C})$ "bordo" = bordo di catena con dimensione $n+1$

$Z_n(\mathcal{C})$ "ciclo" = catena a bordo nullo

Def: n-esimo gruppo di omologia di $\mathcal{C}$

$$H_n(\mathcal{C}) = Z_n(\mathcal{C}) \Big/ B_n(\mathcal{C})$$ gruppo abeliano

Chiamo mappa tra complessi di catene $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$
dove $\mathcal{C} = \left((C_n, \partial_n) \right)_{n=0}^{+\infty}$ $\mathcal{C}' = \left((C'_n, \partial'_n) \right)_{n=0}^{+\infty}$

$\varphi = \left(\varphi_n \right)_{n=0}^{+\infty}$ $\varphi_n : C_n \to C'_n$ omomorfismo t.c.

$$\begin{tikzcd} C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_n \arrow[d, "\varphi_n"] \\ C'_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & C'_n \end{tikzcd}$$

$\varphi_n \circ \partial_{n+1} = \partial'_{n+1} \circ \varphi_{n+1}$

Ese:
$\varphi_n \left(Z_n(\mathcal{C}) \right) \subset Z_n(\mathcal{C}')$
$\varphi_n \left(B_n(\mathcal{C}) \right) \subset B_n(\mathcal{C}')$

$\Longrightarrow$ è ben definito indotto da φ_n un omomorfismo
$$H_n(\varphi) : H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}')$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Categoria dei complessi di catene} \\ \text{con morfismi le mappe tra} \\ \text{complessi}\end{array}\right) \xrightarrow{H} \left(\begin{array}{l}\text{Categoria delle successioni} \\ (G_n)_{n=0}^{+\infty} \text{ di gruppi} \\ \text{abeliani con morfismi} \\ \text{le successioni di omomorf.} \\ \text{di gruppi}\end{array}\right)$$

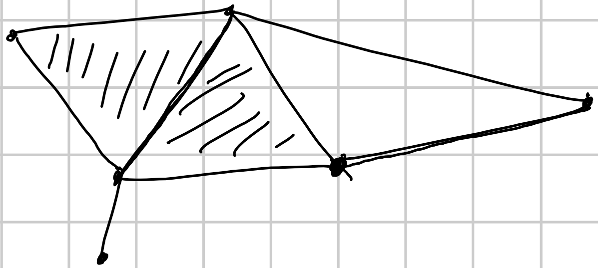
è un funtore covariante (omologia)

Def: Un complesso simpliciale $\mathcal{K}$ $\overbrace{\text{in}}^{\text{finito}}$ $\mathbb{R}^N$ è una collezione finita di simplessi in $\mathbb{R}^N$ t.c.:

(1) se $\sigma \in \mathcal{K}$ e τ è faccia di σ allora $\tau \in \mathcal{K}$

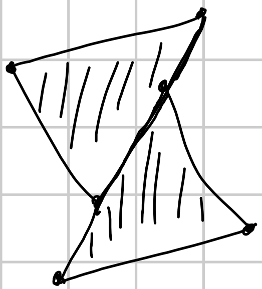
(2) se $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$ allora $\sigma_1 \cap \sigma_2$ è $\emptyset$ o è faccia di entrambi

Es:



$\mathcal{K}$ ha 6 0-simplessi
8 1-simplessi
2 2-simplessi

~~Es~~:



Notazione:

$$|\mathcal{K}| = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \sigma \quad \text{supporto}$$

$$\mathcal{K}^{[n]} = \{\sigma \in \mathcal{K} : \dim(\sigma) = n\}$$

$$\mathcal{K}^{(n)} = \{\sigma \in \mathcal{K} : \dim(\sigma) \leq n\}$$

<u>Esercizio</u>: $\mathcal{K}^{(n)}$ è a sua volta un complesso simpliciale detto n-scheletro di $\mathcal{K}$.

<u>Def</u>: Se $\mathcal{K}$ è complesso simpliciale finito pongo

$$C_n(\mathcal{K}) = \left\{ \sum_{\sigma \in \mathcal{K}^{[n]}} n_\sigma \cdot \sigma \ : \ n_\sigma \in \mathbb{Z} \right\}$$

= gruppo abeliano libero generato da $\mathcal{K}^{[n]}$

Fissata una orientazione arbitraria su ogni el'to di $\overline{\mathcal{K}}$, dati $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ pongo

$$\varepsilon(\sigma, \tau) = \begin{cases} +1 & \text{se } \tau \subset \sigma \text{ è faccia di codim. } 1 \text{ e } \sigma \text{ induce su } \tau \text{ la sua orientazione} \\ -1 & \text{- - - - - opposta - - -} \\ 0 & \text{se } \tau \text{ non è una faccia di codim. } 1 \text{ di } \sigma \end{cases}$$

Definisco: $\partial_n : C_n(\mathcal{K}) \longrightarrow C_{n-1}(\mathcal{K})$ estendendo per $\mathbb{Z}$-linearità:

$$\partial_n \sigma = \sum_{\tau \in K}{}' \varepsilon(\sigma,\tau)\cdot\tau = \sum_{\tau\in K^{(n-1)}}{}' \varepsilon(\sigma,\tau)\cdot\tau$$

$\forall \sigma \in K^{(n)}$

Fatto: $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$

poiché $\quad \eta = \tau_1 \cap \tau_2 \subset \sigma \qquad \varepsilon(\sigma,\tau_1)\cdot\varepsilon(\tau_1,\eta) + \varepsilon(\sigma,\tau_2)\cdot\varepsilon(\tau_2,\eta) = 0$

(segue da Lemma "$E = F \cap G \subset H$")

$$\Longrightarrow K \rightsquigarrow \left(\left(C_n(K), \partial_n \right) \right)_{n=0}^{+\infty} \text{ complesso di catene}$$

$$\rightsquigarrow \left(H_n(K) \right)_{n=0}^{+\infty}.$$

Aspirazione: $H_n(K)$ dipende solo da $|K|$

(anzi dare definizioni di $H_n(X)$ valide per X spazio top. e provare che $H_n(X)$ dipende solo da $X/_{\text{omeo}}$).

Lem: $H_n(K)$ non dipende dalle orientazioni scelte in K a meno di isomorfismo.

Dim: supponiamo di avere due scelte di orientazioni che conducono a bordi $\partial_n, \tilde{\partial}_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$.

Definisco $u(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se le due orientaz. di } \sigma \text{ coincidono} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Ora: $\tilde{\varepsilon}(\sigma, \tau) = u(\sigma) \cdot u(\tau) \cdot \varepsilon(\sigma, \tau)$.

Se pongo $U_n : C_n(K) \longrightarrow C_n(K)$ estendendo $\sigma \longmapsto u(\sigma) \cdot \sigma$

ottengo che ho una mappa tra complessi di catene:

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "U_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n-1} \arrow[d, "U_{n-1}"] \\ C_n \arrow[r, "\tilde{\partial}_n"] & C_{n-1} \end{tikzcd}$$

$$U_{n-1}(\partial_n \sigma) = U_{n-1}\left(\sum_i \varepsilon(\sigma,\tau)\cdot \tau\right) = \sum \varepsilon(\sigma,\tau)\cdot u(\tau)\cdot \tau$$

$$\tilde{\partial}_n(U_n \sigma) = \tilde{\partial}_n(u(\sigma)\cdot\sigma) = u(\sigma)\cdot \sum_i \tilde{\varepsilon}(\sigma,\tau)\cdot\tau$$

$$\varepsilon(\sigma,\tau)\cdot u(\tau) = u(\sigma)\cdot\tilde{\varepsilon}(\sigma,\tau)$$

$\Longrightarrow$ ok.

Essa induce $H_n(K) \longrightarrow \tilde{H}_n(K)$

ma $U^2 = id \Longrightarrow$ l'omomorfismo indotto è isomorfismo.

$\boxtimes$