ETA 14/10/14

$\mathcal{K}$ compl. simpl ; $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}^{(1)}$ albero max

__Teo__: (1) $\pi_1(|\mathcal{K}|) = \langle \alpha(e),\ e \in \mathcal{K}^{[1]} \setminus \mathcal{T} \mid R(T),\ T \in \mathcal{K}^{[2]} \rangle$

$$R(T) = \alpha(e_1)^{\varepsilon_1} \cdot \alpha(e_2)^{\varepsilon_2} \cdot \alpha(e_3)^{\varepsilon_3}$$

se $\partial T = \varepsilon_1 \cdot e_1 \cup \varepsilon_2 \cdot e_2 \cup \varepsilon_3 \cdot e_3$.

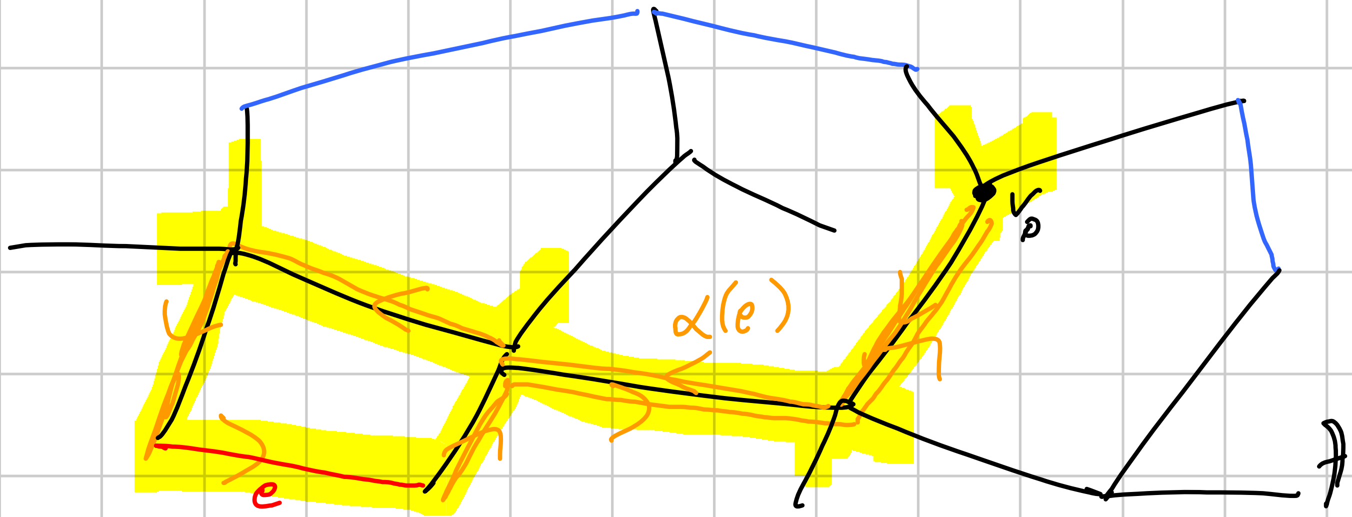
(2) $H_1(|\mathcal{K}|) = Ab(\pi_1(|\mathcal{K}|))$.

Dimo: $\pi_1(|\mathcal{T}|) = 1$

Affermo che $\pi(K^{[1]}) = \langle \alpha(e) : e \in K^{[1]} \setminus \mathcal{T} \rangle$.

Dimostro che aggiungendo $e \in K^{[1]} \setminus \mathcal{T}$ a T

trovo $\pi_1(T) * \mathbb{Z}\langle \alpha(e) \rangle$. Applico Van Kampen con



$U = T \cup e \setminus (\text{punto medio di } e)$

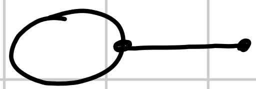
$V = \varepsilon$-intorno di $e \cup$ cammino in T da v_0 a e_0

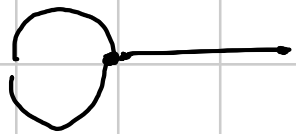
$\cup$ cammino in T da v_0 a e_1

con $\varepsilon << 1$.

Chiaro che: $U \cup V = T \cup e$

U si retrae su T

V si retrae su  $\Rightarrow \pi_1 = \mathbb{Z}\langle \alpha(e) \rangle$

$U \cap V$ si retrae su  $\Rightarrow \pi_1 = 1$

$\Rightarrow \pi_1(T \cup e) = \pi_1(T) * \mathbb{Z}\langle \alpha(e) \rangle$.

Per concludere aggiungo i k-simplessi con k crescente e dimostro che aggiungendo Δ ho

- relazione $r(T)$ se $\Delta = T \in K^{(2)}$
- niente se $\dim(\Delta) \geq 3$ _

Van Kampen: $\mathcal{H} \rightsquigarrow \mathcal{H} \cup \Delta \quad \dim(\Delta) = p$

$U = |\mathcal{H}| \cup \Delta \setminus$ baricentro di $\Delta \longrightarrow$ si retrae su $|\mathcal{H}|$

$V = \varepsilon$-intorno di $\Delta \longrightarrow$ si retrae su $\Delta \longrightarrow *$

$\pi_1 = 1$

$U \cup V = |\mathcal{H}| \cup \Delta$ $\qquad \pi_1 = 1$ per $p \geq 3$

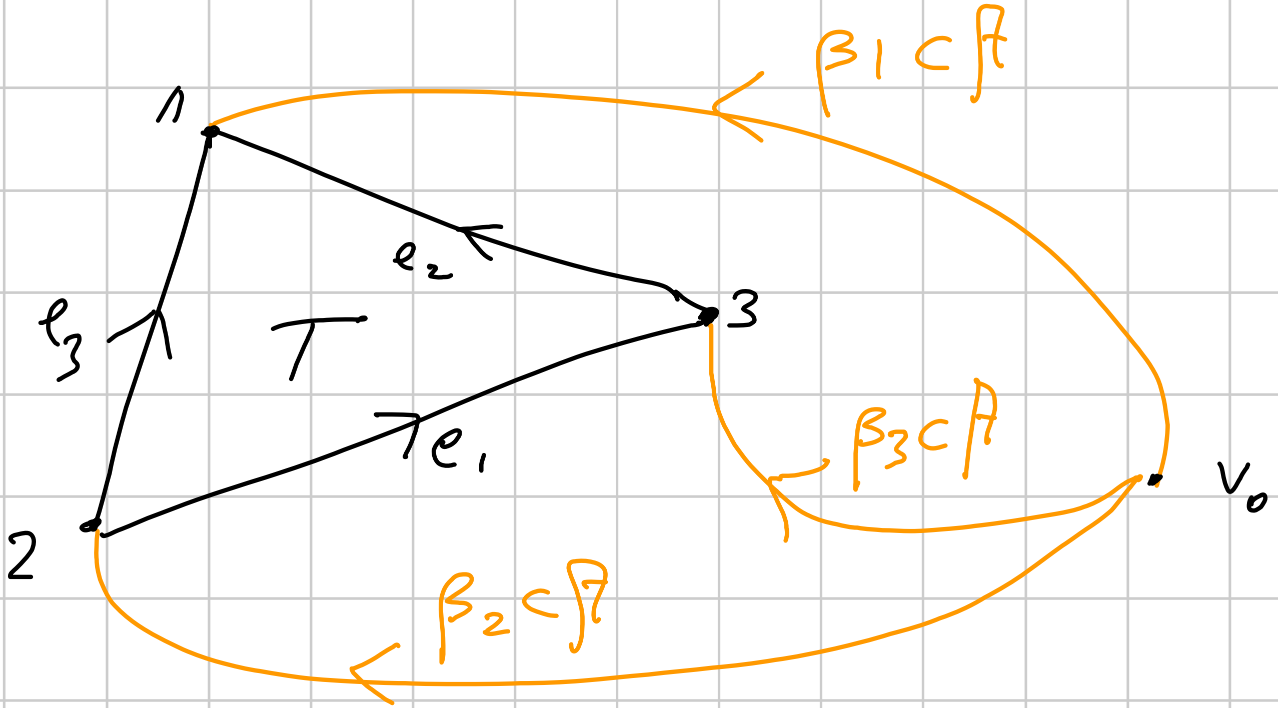
$U \cap V$ si retrae su $\partial \Delta \cong S^{p-1}$ $\qquad \pi_1 = \mathbb{Z}$ per $p = 2$

$$\Rightarrow \pi_1(|\mathcal{H}| \cup \Delta) = \frac{\pi_1(\mathcal{H})}{\quad}$$

niente se $p \geq 3$ $\qquad \partial T$ per $p = 2$

Si conclude notando che l'espressione di ∂T come el. di $\pi_1(|K^{(1)}|)$ in funzione di $\alpha(e) : e \in X^{[1]} \setminus A$ è proprio

$$\alpha(e_1)^{\varepsilon_1} \cdot \alpha(e_2)^{\varepsilon_2} \cdot \alpha(e_3)^{\varepsilon_3}$$



$$\pi_1(|K^{(1)}|) \ni [\partial T] = \beta_1 e_3^{-1} \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot \beta_1^{-1}$$

$\varepsilon_1 = 1$

$\varepsilon_2 = 1$

$\varepsilon_3 = -1$

$$= \underbrace{\beta_1 \cdot e_3^{-1} \cdot \beta_2^{-1}}_{\alpha(e_3)^{\varepsilon_3}} \cdot \underbrace{\beta_2 \cdot e_1 \cdot \beta_3^{-1}}_{\alpha(e_1)^{\varepsilon_1}} \cdot \underbrace{\beta_3 \cdot e_2 \cdot \beta_1^{-1}}_{\alpha(e_2)^{\varepsilon_2}} \; -$$

Provo che $H_1(|K|)$ è $Ab(\pi_1(|K|))$ facendo vedere che ha presentazione abelianizzata di quella del π_1. Indico con $a(e)$ ($e \in K^{[1]} \setminus \mathcal{A}$) sia la 1-catena data dal cammino $\alpha(e)$, che è un 1-ciclo, è anche l'immagine di $\alpha(e)$ nell'abelianizzato di $\langle \alpha(e) : e \in K^{[1]} \setminus A \rangle$.

Provo che: (1) $Z_1(K) = \langle a(e) : e \in K^{[1]} \setminus A \rangle$

(2) $B_1(K)$ è generato da $\tilde{\pi}(T)$ al variare di $T \in K^{[2]}$

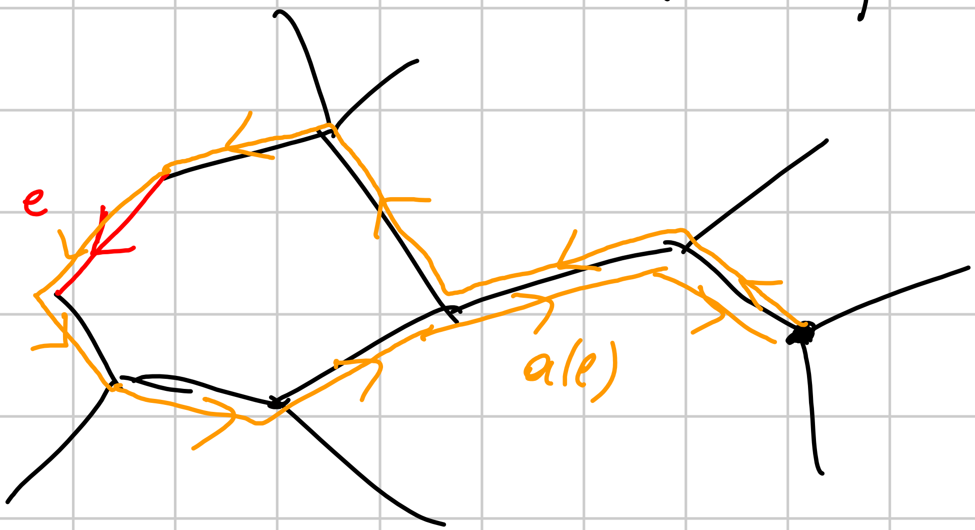
Questo basta:

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{H_1(K)} = \underbrace{\langle a(e) \ e \ldots \mid \tilde{\pi}(T) \ldots \rangle}_{\text{è l'abelianizzazione della pres. di } \pi_1(|K|)}$$

(1) Sia $z = \sum_{e \in K^{[1]}} m(e) \cdot e \in Z_1(K)$

cioè $\partial_1(z) = 0$.

Considero $z' = z - \sum_{e \in K^{[1]} \setminus T} m(e) \cdot a(e)$



Noto: $a(e) \in Z_1(K) \Rightarrow z \in Z_1(K)$

ogni $e \in K^{[1]} \setminus T$ ha coeff 0 in z'

(ragione: un certo $\bar{e}$ compare in $a(e)$

solo per $e = \bar{e}$ con coeff. 1).

$\Rightarrow z' \in Z_1(T)$.

Provo che z' è necessariamente la catena nulla:

sappiamo che T ha un lato libero:

Se $z' = \sum_{d \in \Gamma^{[1]}} m(d) \cdot d$

il coeff. di v in $\partial z'$ è $\pm m(c)$

$\Rightarrow m(c) = 0$ (z' ciclo); procedo

induttivamente. HO provato che z ciclo

$$\Rightarrow z = \sum_{e \in K^{[1]} \setminus \Gamma} n(e) \cdot a(e).$$

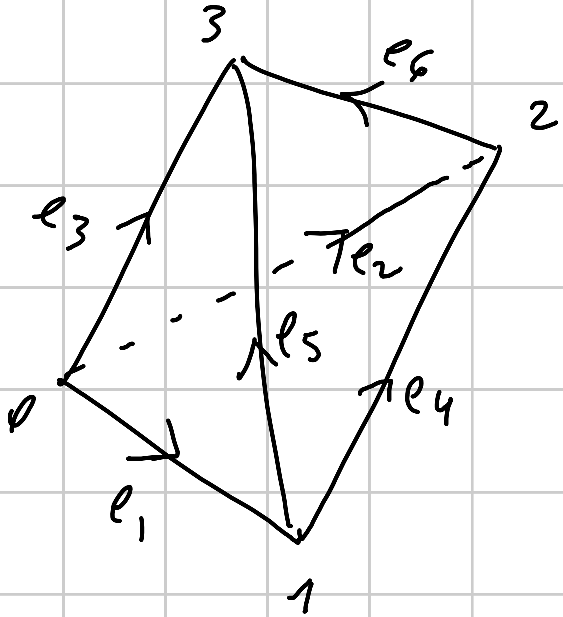
(2) $B_1(K)$ è generato da $\partial T : T \in K^{[2]}$

e si vede che ∂T è $\varepsilon_1 a(e_1) + \varepsilon_2 a(e_2) + \varepsilon_3 a(e_3)$
(stesso argomento di prima in notazione additiva) _ $\boxed{///}$

——— o ———

<u>Esercizio</u>: $H_2(\partial(\text{tetraedro})) \cong \mathbb{Z}$

$$\partial(\text{tetraedro}) \cong S^2$$



orienta ogni T_j = faccia opposta a j

come ∂(tetraedro) :

$$\partial T_0 = e_4 - e_5 + e_6$$
$$\partial T_1 = -e_2 + e_3 - e_6$$
$$\partial T_2 = e_1 - e_3 + e_5$$
$$\partial T_3 = -e_1 + e_2 - e_4$$

$$B_2(K) = \langle \partial\sigma : \sigma \in K^{(3)} = \emptyset \rangle = \{0\}$$

$$H_2(K) = Z_2(K) = \{ n_0 T_0 + n_1 T_1 + n_2 T_2 + n_3 T_3 : \partial(\;''\;) = 0 \}$$

$$\partial(\;''\;) = 0 \iff n_0 = n_1 = n_2 = n_3$$

$$\Rightarrow Z_2(K) = \mathbb{Z}\langle T_0 + T_1 + T_2 + T_3 \rangle$$

<u>Def</u>: dati K, L complessi simpliciali

dico $f : |K| \to |L|$ simpliciale se

$f(\sigma) \in L \quad \forall \sigma \in K$ e

Se $\sigma = (v_0, \dots, v_p)$ si ha $f\left(\sum_{j=0}^{p} t_j v_j\right) = \sum_{j=0}^{p} t_j f(v_j)$ _

<u>Oss</u>: •) f è determinata da $f_0 : K^{[0]} \longrightarrow L^{[0]}$

•) una assegnata $f_0 : K^{[0]} \longrightarrow L^{[0]}$ si estende a

$f : |K| \to |L|$ simpliciale $\underset{\text{conv}}{\Longleftrightarrow} (f(v_0), \dots, f(v_p)) \in L$

$\forall (v_0, \dots, v_p) \in K$ _

Siano ora K e L orientati; definisco

data $f : |K| \to |L|$ simpliciale una

$f_* = (f_n)_{n=0}^{+\infty} : C_*(K) \longrightarrow C_*(L)$

$f_m : C_m(K) \to C_m(L)$ estende

$$K^{(m)} \ni \sigma \longmapsto \begin{cases} b(\sigma)\cdot f(\sigma) & \text{se } \dim(f(\sigma)) = m \\ 0 & \text{se } \dim(f(\sigma)) < m \end{cases}$$

con $b(v_0, \dots, v_m) = \begin{cases} +1 & \text{se gli ordinamenti } (v_0, \dots, v_m)\ (f(v_0), \dots, f(v_m)) \text{ sono concordi} \\ -1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

<u>Prop</u>: f_* è una mappa tra complessi di catene

<u>Cor</u>: f induce mappe $H_m(f) : H_m(K) \to H_m(L)$

omomorfismi (di solito $f_* := H_n(f)$)

dunque: H è un funtore dalla categoria

$$\begin{pmatrix} \text{complessi simpliciali orientati;} \\ \text{mappe simpliciali} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \text{successioni di gruppi abeliani;} \\ \text{successioni di omomorfismi} \end{pmatrix}.$$

Dimo:

$$\begin{tikzcd} C_n(K) \arrow[r, "\partial_n^K"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1}(K) \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ C_n(L) \arrow[r, "\partial_n^L"] & C_{n-1}(L) \end{tikzcd}$$

devo provare che $f_{n-1}(\partial_n^{\mathcal{K}} \sigma) = \partial_n^{\mathcal{L}}(f_n \sigma)$
$\forall \sigma \in \mathcal{K}^{[n]}$

Tre casi:

•) $\dim(f(\sigma)) = n$:) $\dim(f(\sigma)) \leq n-2$:.) $\dim(f(\sigma)) = n-1$

$$•)\ f_{n-1}(\partial_n^{\mathcal{K}} \sigma) = f_{n-1}\Big(\sum_{\substack{\tau \in \mathcal{K}^{[n-1]} \\ \tau \subset \sigma}} \varepsilon(\sigma,\tau)\cdot\tau\Big)$$

$$= \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{K}^{[n-1]} \\ \tau \subset \sigma}} \varepsilon(\sigma,\tau)\cdot b(\tau)\cdot \underbrace{f(\tau)}_{\text{ha dim } n-1}$$

perché $f|_{\sigma^{[0]}}$ iniettiva $\Rightarrow$ anche $f|_{\tau^{[0]}}$

$$\partial_n^{\mathcal{L}}(\mathcal{F}_n(\sigma)) = \partial_n^{\mathcal{L}}\left(b(\sigma)\cdot \mathcal{F}(\sigma)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{\eta \in \mathcal{L}^{(n-1)} \\ \eta < \mathcal{F}(\sigma)}} b(\sigma)\cdot \varepsilon(\mathcal{F}(\sigma), \eta)\cdot \eta$$

Chiaro che $\left\{ (n-1)\text{-facce } \tau \text{ di } \sigma \right\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ (n-1)\text{-facce } \eta \text{ di } \mathcal{F}(\sigma) \right\}$

bisogna vedere che

$$\varepsilon(\sigma,\tau)\cdot b(\tau) = b(\sigma)\cdot \varepsilon(f(\sigma),f(\tau))$$

ovvero $\quad \varepsilon(f(\sigma),f(\tau)) = b(\tau)\cdot\varepsilon(\sigma,\tau)\cdot b(\sigma)$ –

<u>ovvio</u> .

:) $\dim(f(\sigma)) \leq n-2 \qquad f_n(\sigma) = 0 \implies \partial_n^{\mathcal{L}}(f_n\sigma) = 0$

$\implies \dim(f(\tau)) \leq n-2 \quad \forall \tau \in \partial\sigma$

$\implies f_{n-1}(\partial_n^{\mathcal{X}}\sigma) = 0 \qquad \implies$ <u>ok</u> .

ii) $\dim f(\sigma) = n-1$; poiché $f_n(\sigma) = 0$

devo vedere che $f_{n-1}(\partial_n^{\chi} \sigma) = 0$ _

Wlog $\sigma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ orientato da questo ord. _

$f(v_0) = f(v_1) = w_1 \quad f(v_j) = w_j \quad j = 2, \dots, n$

$(w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{L}^{[n-1]}$ _

$$f_{n-1}(\partial_n^{\chi} \sigma) = f_{n-1}\Big(\varepsilon_0 \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) + \varepsilon_1 (v_0, v_2, \dots, v_n) + \varepsilon_2 (v_0, v_1, \dots v_n) + \dots\Big)$$

$$= \varepsilon_0 \cdot b_0 \cdot (w_1, \dots, w_n) + \varepsilon_1 \cdot b_1 \cdot (w_1, \dots, w_n) + 0 + \dots + 0$$

Devo provare che $\varepsilon_0 \cdot b_0 + \varepsilon_1 \cdot b_1 = 0$:

$\varepsilon_0 =$ l'ordinamento $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ è positivo?

$\varepsilon_1 =$ l'ordinamento $(v_0, v_2, \dots, v_n)$ è negativo?

$b_0 =$ l'ordinamento $(w_1, \dots, w_n)$ è concorde con $(v_1 v_2 \dots v_n)$?

$b_1 =$ l'ordinamento $(w_1, \dots, w_n)$ è concorde con $(v_0, v_2, \dots, v_n)$?

$\boxed{V_1}$

Teo (di approx. simpliciale):

Se $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ è una funzione continua allora esiste $\mathcal{H}$ suddivisione di $\mathcal{K}$ e

$g : |\mathcal{H}| = |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ simpliciale per $\mathcal{H} \to \mathcal{L}$

t.c. $\forall x \in |\mathcal{K}|$ $\exists \tau \in \mathcal{L}$ con $f(x), g(x) \in \tau$.

Def: $f_0, f_1 : X \to Y$ continue sono *omotope* se esiste $F : X \times [0,1] \to Y$ continua t.c. $F(\cdot, j) = f_j$ $j = 0, 1$. Scriviamo $f_0 \simeq f_1$

Cor 1: Data $f: |K| \to |L|$ continua $\exists\, H$ suddiv. di K e $g: |H| \to |L|$ simpliciale t.c. $g \simeq f$.

Dim: Sia g come nel Teo; posso porre

$$F(x,t) = \underbrace{(1-t)f(x) + t \cdot g(x)}_{\substack{\text{comb. conv. ha senso poiché} \\ \exists\, \tau \in L \text{ t.c. } f(x),\, g(x) \in \tau}}$$

Cor ("approx"): dati $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{L}|$ continua e $\varepsilon > 0$
esistono suddivisioni $\mathcal{H}$ di $\mathcal{K}$ e $\mathcal{T}$ di $\mathcal{L}$ e
$g : |\mathcal{H}| \to |\mathcal{T}|$ simpliciale t.c. $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Dim: Prima divido $\mathcal{L}$ in $\mathcal{T}$ t.c. $\max \operatorname{diam}(\mathcal{T}) < \varepsilon$.
Applico il Teo a $f : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{T}|$ e trovo
$g : |\mathcal{H}| \to |\mathcal{T}|$ simpliciale

$$f(x), g(x) \in \tau \in \mathcal{T} \implies \|f(x) - g(x)\| \leq \operatorname{diam}(\tau) < \varepsilon$$

$$\implies \|f - g\|_\infty < \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Per il Teo usiamo:

$\mathcal{K}$ compl. simpl; $v \in \mathcal{K}^{[0]}$

$$St(v, \mathcal{K}) = \{ \sigma \in \mathcal{K} : v \in \sigma \}$$

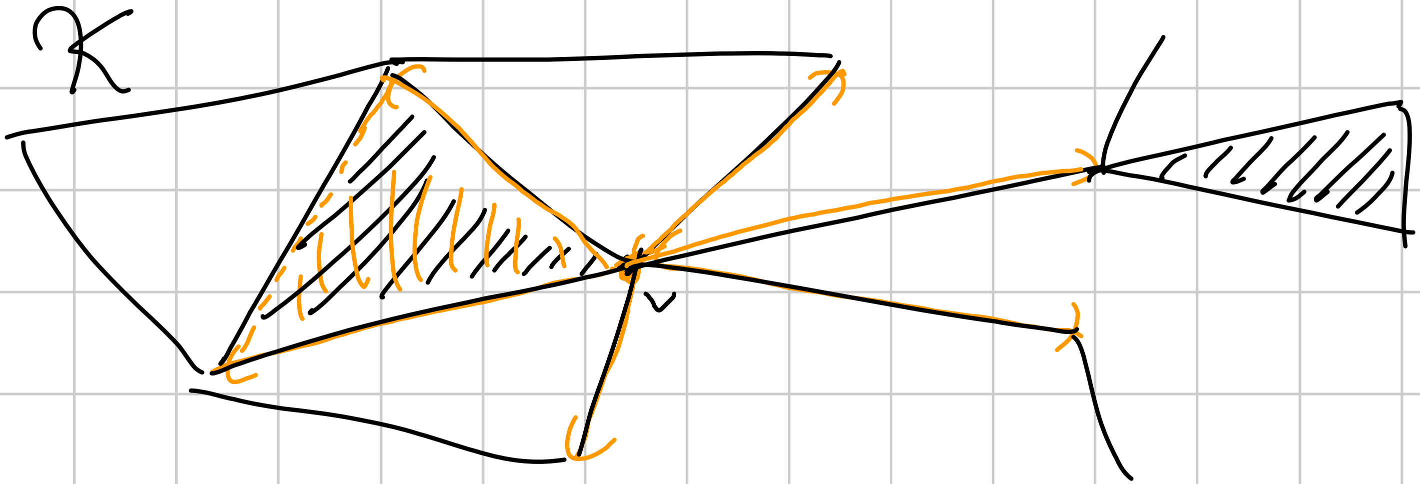
stella (star) di v in K.

Ricordo: $int(\sigma)$ = parte interna topologica di σ in $\mathcal{S}(\sigma)$

$= \{ \sum t_i v_i : t_i > 0, \sum t_i = 1 \}$ se $\sigma = (v_0, \dots, v_m)$

$$\mathrm{OSt}(v, K) = \bigcup \{ \mathrm{int}(\sigma) : \sigma \in \mathrm{St}(v, K) \}$$

$$= \bigcup \{ \mathrm{int}(\sigma) : \sigma \in K, \sigma \ni v \}.$$



Lem: $\mathrm{OSt}(v, K)$ è un aperto di $|K|$.

Dim: K è un ricoprimento chiuso finito di $|K|$

$\Longrightarrow$ è fondamentale.

Dunque basta vedere che

$$\mathrm{Ost}(v, K) \cap \tau \text{ è aperto in } \tau \quad \forall \tau \in K.$$

$$\tau \not\ni v \Longrightarrow \mathrm{Ost}(v, K) \cap \tau = \emptyset$$

$$\tau \ni v \Longrightarrow \mathrm{Ost}(v, K) \cap \tau = \bigcup_{\substack{\sigma \in K \\ \tau \supset \sigma \supset v}} \mathrm{int}(\sigma)$$

è aperto in τ