ETA 13/11/14

Altre teorie omologiche

Fatto: complessi simpl. sono "rigidi" (Es: triangolaz. del toro ha ≥ 14 triangoli).

Δ - complessi

$$\Delta_m = \mathrm{Conv}(e_0, \dots, e_m) \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

$$\varphi_j^{(m)} : \Delta_{m-1} \hookrightarrow \Delta_m \quad \text{simpl. t.c.} \quad \varphi_j^{(m)}(e_i) = \begin{cases} e_i & i < j \\ e_{i+1} & i \geq j \end{cases}$$

(Δ_{m-1} visto come faccia di Δ_m opposta a e_j).

<u>Def</u>: chiamo Δ-complesso uno spazio topologico X con $\mathcal{I} = \{\sigma_\alpha : \alpha \in A\}$ con $\sigma_\alpha : \Delta_{m(\alpha)} \longrightarrow X$ continua:

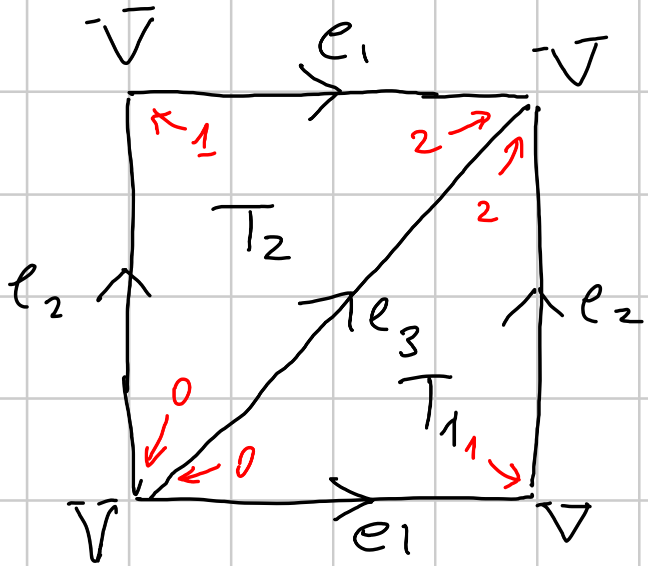
1. $\sigma_\alpha|_{\mathrm{int}(\Delta_{m(\alpha)})}$ iniettiva

2. $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\mathrm{int}(\Delta_{n(\alpha)}))$

3. $\sigma_\alpha \circ \varphi_j^{(n(\alpha))} \in \mathcal{J} \quad \forall \alpha \in A \qquad j = 0, \dots, n(\alpha)$

4. $U \subset X$ aperto $\Longleftrightarrow$ $\sigma_\alpha^{-1}(U)$ aperto in $\Delta_{n(\alpha)}$ $\forall \alpha \in A$.

<u>Esempio</u>: toro



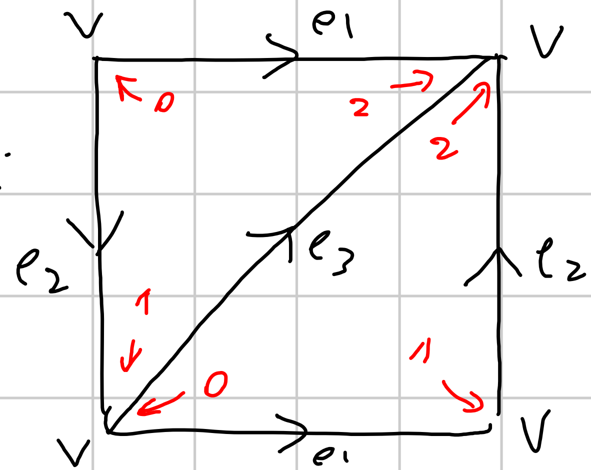
$\sigma_1^{(0)} = V$ $\sigma_1^{(1)} = e_1$ $\sigma_2^{(1)} = e_2$ $\sigma_3^{(1)} = e_3$

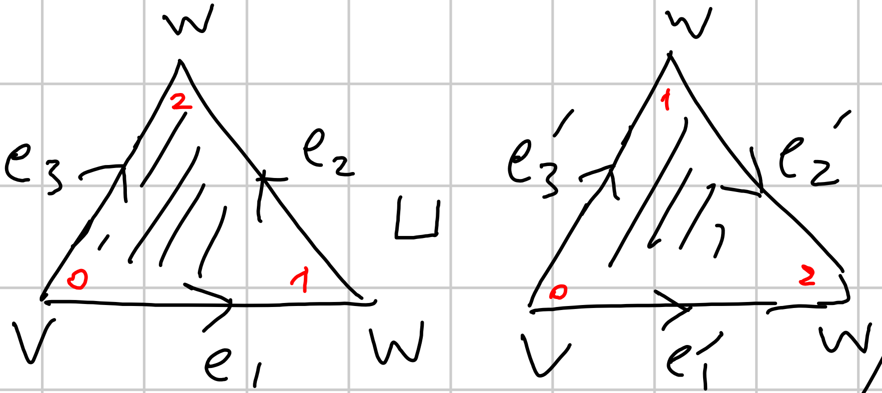
$\sigma_1^{(2)}$: $01 \to e_1$, $12 \to e_2$, $02 \to e_3$

$\sigma_2^{(2)}$: $01 \to e_2$, $12 \to e_1$, $02 \to e_3$

Non andrebbe bene: $\sigma_2^{(2)}$: $01 \to e_3$, $12 \to e_1^{-1}$, $02 \to e_2$

<u>Klein</u>:



$\underline{Es}$: $X =$ 

$/ \; e_1 = e_1'$, $e_2 = e_2'$, $e_3 = e_3'$

Chiamo simplesso di un Δ-complesso X uno dei $\sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)})$.
Chiamo faccia di codim 1 di $\sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)})$ una delle $(\sigma_\alpha \circ \varphi_j^{(n(\alpha))})(\Delta_{n(\alpha)-1})$; chiamo faccia F di codim k di S un simplesso t.c. $F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = S$ t.c.

F_{i-1} è faccia di codim 1 di F_i. Cioè:

F è faccia di S se $S = \sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)})$ e $F = \sigma_\alpha(\tilde{F})$

$\tilde{F}$ faccia di $\Delta_{n(\alpha)}$.

Prop: (1) F è faccia di S se e solo se esistono σ_α e $\tilde{F}, \tilde{S}$ facce di $\Delta_{n(\alpha)}$ con $\tilde{F} \subset \tilde{S}$ e $\sigma_\alpha(\tilde{F}) = F$, $\sigma_\alpha(\tilde{S}) = S$.

(2) Se F è faccia di S e $S \subset \sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)})$ allora esistono $\tilde{F} \subset \tilde{S}$ facce di $\Delta_{n(\alpha)}$ con $F = \sigma_\alpha(\tilde{F})$, $S = \sigma_\alpha(\tilde{S})$.

(Esercizio: usare il fatto che $X = \bigsqcup \sigma_\alpha(\mathrm{int}(\Delta_{n(\alpha)}))$.)

Cor: i simplessi in X sono chiusi: infatti per la Prop.
$\sigma_\beta^{-1}(\sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)}))$ è unione di facce di $\Delta_{n(\alpha)}$

$\Rightarrow$ è chiuso in $\Delta_{n(\alpha)}$ $\Rightarrow$ conclusione perché $\{\sigma_\alpha(\Delta_{n(\alpha)})\}$ sono ric. fondamentale.

Oss: un Δ-complesso può contenere infiniti simplessi.

Oss: un Δ-complesso X è realizzato come quoziente di una unione disgiunta di simplessi astratti / incollamento simpliciale tra le facce:

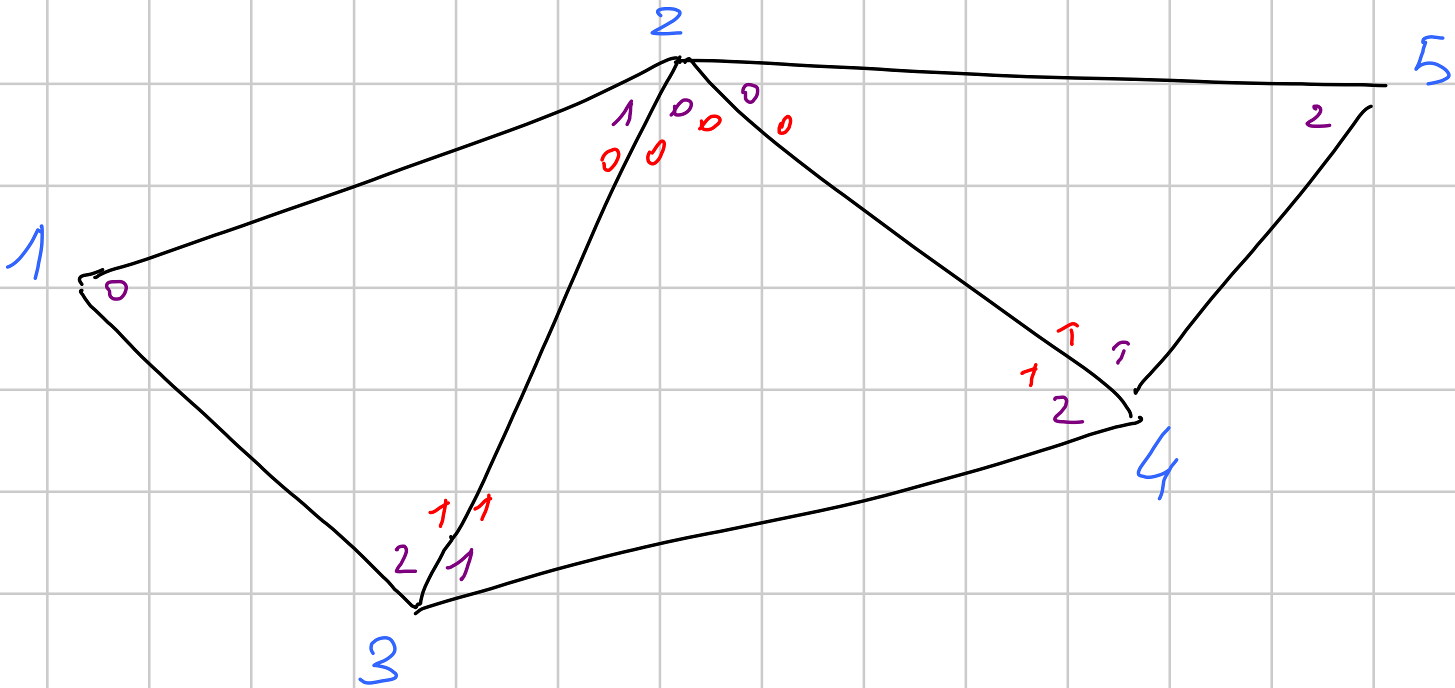
$$X = \bigsqcup_{\alpha \in A} \Delta_{n(\alpha)} \Big/ \begin{array}{l} x \in \Delta_{n(\alpha)} \\ y \in \Delta_{n(\beta)} \\ x \sim y \text{ se } \sigma_\alpha(x) = \sigma_\beta(y) \end{array}$$

dalla Prop seguo che è un incollamento tra facce.

Un tale incollamento dà luogo a un Δ-complesso solo se

- sui vertici di ogni simplesso astratto è dato un ordinamento t.c. gli incollamenti tra due facce rispettano gli ordinamenti indotti.

<u>OSS</u>: un complesso simpliciale è un Δ-complesso: i simplessi sono quelli del complesso; basta prendere un ordinamento totale di tutti i vertici del complesso e su ogni simplesso prendere l'ordinamento indotto.



totale

Omologia di un Δ-complesso X :

$$C_n = \langle \sigma_\alpha \in \mathcal{I} \; : \; n(\alpha) = n \rangle$$

$$\partial_n \sigma_\alpha = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \underbrace{\left(\sigma_\alpha \circ \varphi_j^{(n(\alpha))} \right)}$$

è uno dei σ_β

Facile: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \implies$ ho H'_*.

Sui complessi simpliciali viene H_*.

C'è una naturale nozione di suddivisione di un Δ-complesso; H_* passa alle suddivisioni; inoltre un Δ-complesso finito ha una suddivisione in complesso simpliciale.

Complesso simpliciale astratto:

(V, K) (scriverò solo K) con

V un insieme, $K \subset \mathcal{P}(V)$ t.c.

$\# \sigma < +\infty \quad \forall \sigma \in K$, $\{v\} \in K \quad \forall v \in V$,

$\sigma \in K,\ \tau \subset \sigma \Longrightarrow \tau \in K$.

<u>Oss</u>: $\bar{V} = \{\sigma \in K : \# \sigma = 1\} \Longrightarrow$ dimentico V.

Chiamo orientazione di $\sigma \in K$ un ordinamento di σ a meno di permutaz. positive. $K^{[n]} = \{\sigma \in K : \# \sigma = n+1\}$

$C_n(K) = \langle K^{[n]} \rangle$

$$\partial_n \underbrace{(v_0, \dots, v_n)} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \underbrace{(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)}$$

$\{v_0, \dots, v_n\} \in K^{[n]}$

con $(v_0, \dots, v_n)$ un ordinamento positivo

$\pm \quad \{w_1, \dots, w_n\} = \{v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n\}$

con segno + se $(v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n)$ è ordinamento positivo per $\{w_1, \dots, w_n\}$

segno − altrimenti.

$\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0 \implies$ ho H''_*.

<u>Oss</u>: un complesso simpliciale geometrico L dà

il complesso astratto $\{ \tau^{[0]} : \tau \in \mathcal{L} \} =: \mathcal{K}$ e per costruzione

$$H_*(\mathcal{L}) \cong H''_*(\mathcal{K}) .$$

Inoltre anche per i complessi astratti ho la nozione di suddivisione e H''_* passa alle suddivisioni.

<u>Oss</u>: $\mathcal{K}$ può avere infiniti simplessi.

$\mathcal{K}$ compl. simpl. astratto: realizzazione di $\mathcal{K}$:

$$|\mathcal{K}| = \left\{ x : \mathcal{K}^{[0]} \to [0,1] : \sum_{v \in \mathcal{K}^{[0]}} x(v) = 1, \ \{ v \in \mathcal{K}^{[0]} : x(v) > 0 \} \in \mathcal{K} \right\}$$

Pensiamo la x come il punto

$$\sum_{v \in \mathcal{K}^{[0]}} x(v) \cdot v = \sum_{v \in \sigma^{[0]}} x(v) \cdot v$$

$$\sigma = \{ v \in \mathcal{K}^{[0]} : x(v) > 0 \} \in \mathcal{K}$$

Su $|K|$ è definita la distanza

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{v \in K^{[0]}} (x(v) - y(v))^2} \;.$$

Induce una topologia troppo fine.

Se $\sigma \in K$ pongo $|\sigma| = |\mathcal{P}(\sigma)|$

Se $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$, $|\sigma| = \left\{ x : \{v_0, \dots, v_n\} \to [0,1] : \sum_{i=0}^{n} x(v_i) = 1 \right\}$

Su $|\sigma|$ pongo la topologia indotta dalla distanza (la rende isometrico a $K \cdot \Delta_n$) ; su $|K|$ pongo la topologia debole indotta dal ric. $\{|\sigma| : \sigma \in K\}$:

$A \subset |K|$ aperto $\Longleftrightarrow$ $A \cap |\sigma|$ è aperto in $|\sigma|$ $\forall \sigma \in K$.

Prop: se $\mathcal{L}$ è un complesso simpliciale geometrico, $K = \{\sigma^{(0)} : \sigma \in \mathcal{L}\}$ allora c'è un omeomorfismo naturale $|\mathcal{L}| \xrightarrow{\varphi} |K|$.

Dim: $\varphi(p)$: $p \in int(\sigma)$, $\sigma \in \mathcal{L}$, $\sigma = Conv(v_0, \dots, v_n)$

$$\Rightarrow p = \sum_{i=0}^{n} t_i v_i \qquad \sum t_i = 1 \qquad t_i > 0$$

$$\varphi(p)(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v \notin \{v_0, \dots, v_n\} \\ t_i & \text{se } v = v_i \,. \end{cases}$$

$$\varphi^{-1}(x) = \sum_{v \in K^{[0]}} x(v) \cdot v = \sum_{v \in \sigma^{[0]}} x(v) \cdot v$$

$$\sigma \in \mathcal{L} \,. \qquad \blacksquare$$

Quindi: complesso simpliciale astratto finito "=" complesso simpliciale geometrico

Prop: K c.s.a. $\Rightarrow$ $|K|$ è normale.

Dim: Normale $= T_1 + T_4$.

T_1: i punti sono chiusi in ogni $|\sigma| \cong D^n \Rightarrow$ sono chiusi.

T_4: basta vedere che se C è chiuso e $f: C \to [0,1]$
è continua allora f si estende a $F: |K| \to [0,1]$ continua.

(Basta: C_0, C_1 chiusi disgiunti $\Rightarrow$ $C_0 \cup C_1$ chiuso e $f: C_0 \cup C_1 \to [0,1]$ $\quad f|_{C_0} \equiv 0 \quad f|_{C_1} \equiv 1$

è continua $\Rightarrow$ si estende a F

$\Rightarrow U_0 = F^{-1}([0, 1/3))$, $U_1 = F^{-1}((2/3, 1])$

sono aperti che separano C_0 e C_1.)

L'estensione si costruisce ricorsivamente sui

$|K^{(n)}| = |\{\sigma \in K : \# \sigma \leq n+1\}|$.

Per $K^{(0)}$ ok : è discreto.

Nell'estensione da $K^{(n)}$ a $K^{(n+1)}$ posso fare separatamente su ogni $|\sigma|$. ho F già definito su

$$|\partial\sigma| \cup (|\sigma| \cap C) \text{ chiuso di } |\sigma| \cong D^n$$

$\Longrightarrow$ esiste l'estensione a $|\sigma|$. $\blacksquare$

Prop: se K c.s.a. e $C \subset |K|$ è compatto allora
$\#\{\sigma \in K : C \cap |\sigma| \neq \emptyset\} < +\infty$.

Dim: per ogni σ t.c. $C \cap |\sigma| \neq \emptyset$ prendiamo un punto $p_\sigma \in C \cap |\sigma|$. Siccome ogni σ ha un numero finito di facce, se $\#\{\sigma \in K : C \cap |\sigma| \neq \emptyset\}$ fosse infinito anche $\{p_\sigma : \sigma \dots\}$ sarebbe infinito; dato $\tau \in K$ ho che

$$\{p_\sigma : \sigma \dots\} \cap |\tau|$$

è finito perché contiene al più un punto per ogni faccia di τ $\Longrightarrow$ è discreto (i punti sono aperti) in $|\tau|$

$\Longrightarrow$ $\{p_\sigma : \sigma \dots\}$ è discreto chiuso in $|K|$; ma $\{p_\sigma : \sigma \dots\} \subset C$ che è compatto: assurdo. $\blacksquare$

Cor: se $|\mathcal{K}|$ è cpt allora $\mathcal{K}$ è finito ($\Rightarrow$ è isomorfo a complesso geometrico).

Def: $\mathcal{K}, \mathcal{H}$ complessi astratti; $\varphi : \mathcal{K}^{[0]} \longrightarrow \mathcal{H}^{[0]}$ è simpliciale se $\varphi(\sigma) \in \mathcal{H}$ $\forall \sigma \in \mathcal{K}$.

Oss: una tale φ induce $|\varphi| : |\mathcal{K}| \to |\mathcal{H}|$ dove

$$|\varphi|(x)(w) = \sum_{\substack{v \in \mathcal{K}^{[0]} \\ \varphi(v) = w}} x(v).$$

Nel caso geometrico

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, mapsto, "\varphi"'] & t_0 v_0 + \cdots + t_m v_m \arrow[d, mapsto, "\varphi"] \\ {} & t_0 \varphi(v_0) + \cdots + t_m \varphi(v_m) \end{tikzcd}$$

$$\{v_0, \dots, v_m\} = \{v : x(v) > 0\}$$

$$t_i = x(v_i)$$

$$\{\varphi(v_i) : i = 0, \dots, m\} = \{w_0, \dots, w_k\}$$

$$t_0 \varphi(v_0) + \cdots + t_m \varphi(v_m) = \sum_{i=0}^{k} s_i w_i$$

$$s_i = \sum_{j,\ \varphi(v_j) = w_i} t_j$$

Omologia dei complessi simpliciali astratti: valgono ancora tutte le proprietà dette per l'omologia dei complessi geometrici, ma nell'escissione bisogna chiamare <u>sottocomplesso</u> $\mathcal{L}$ di $\mathcal{K}$ un sottocomplesso combinatorio con $|\mathcal{L}|$ chiusa in $|\mathcal{K}|$.