# ETA 2/10/14

$f_1, f_2 \in Hom(G, H)$ $\quad f_1 \cdot f_2$ prodotto puntuale

è omomorfismo solo per H abeliano:

$(f_1 \cdot f_2)(g_1 \cdot g_2) \qquad (f_1 \cdot f_2)(g_1) \cdot (f_1 \cdot f_2)(g_2)$

Dunque nei funtori $Hom(\cdot, T)$ e $Hom(T, \cdot)$ prendere tutti i gruppi abeliani.

$\mathcal{K}$ complesso simpliciale finito in $\mathbb{R}^N$

$C_n(\mathcal{K}) = \langle K^{(n)} \rangle$ $\quad \partial_n : C_n(\mathcal{K}) \to C_{n-1}(\mathcal{K})$

$\Longrightarrow H_n(\mathcal{K})$.

Def: chiamo $\mathcal{K}$ triangolazione di $|\mathcal{K}|$.

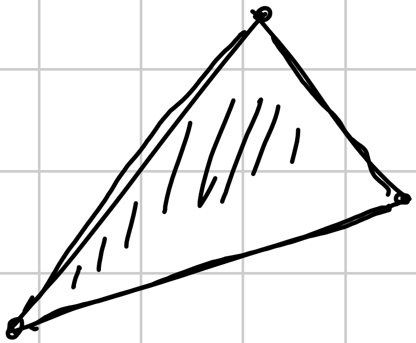
---

$\sigma$ simplesso, $A(\sigma) =$ supporto

$\mathrm{int}(\sigma) = \mathrm{int}^{\mathrm{Top}}_{A(\sigma)}(\sigma)$.

Se $\sigma = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_m)$, $\mathrm{int}(\sigma) = \left\{ \sum t_i v_i \,,\, t_i > 0, \sum t_i = 1 \right\}$

$\partial\sigma = \sigma \setminus \mathrm{int}(\sigma)$. Oss: $\sigma = \bigsqcup_{\substack{\tau \subset \sigma \\ \text{faccia}}} \mathrm{int}(\tau)$



**Lem**: $\mathcal{K}$ complesso simpliciale $\Rightarrow |\mathcal{K}| = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \mathrm{int}(\sigma)$.

**Dim**: Se $x \in |\mathcal{K}|$ esiste $\tau \in \mathcal{K}$ t.c. $x \in \tau$
ed esiste $\sigma$ faccia di $\tau$ t.c. $x \in \mathrm{int}(\sigma)$.
Se $\mathrm{int}(\sigma_1) \cap \mathrm{int}(\sigma_2) \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$
$\Rightarrow \tau = \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \mathcal{K}$ è faccia di $\sigma_1$ e $\sigma_2$

$\mathrm{int}(\sigma_j) \subset \tau \subset \sigma_j \Rightarrow \tau = \sigma_j \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$ . $\blacksquare$

**Def:** $\mathcal{L}$ è una suddivisione di $\mathcal{K}$ se $|\mathcal{L}| = |\mathcal{K}|$ e ogni simplesso di $\mathcal{L}$ è contenuto in un simplesso di $\mathcal{K}$.

**Teo 1:** Se $\mathcal{L}$ è suddivisione di $\mathcal{K}$ esiste un isomorfismo naturale $H_n(\mathcal{K}) \to H_n(\mathcal{L})$

**Teo 2:** $|\mathcal{K}_1| = |\mathcal{K}_2| \Rightarrow$ hanno suddivisione comune.

Cor: $H_n(K)$ dipende / isomorfismo solo da $|K|$.

Per il Teo 1 cominciamo da:

Prop: se $\mathcal{L}$ suddivide $K$ allora ogni $\sigma \in K$ è unione di $\tau \in \mathcal{L}$.

Oss: Non è ovvio:

$K = \{[0,4],[1,5]\}$

$\mathcal{L} = \{[0,3],[1,4],[2,5]\}$

$K$

Non sono complessi simpliciali.

$L$

<u>Lem 1</u> : $\eta$ faccia di $\sigma \Longrightarrow \eta = A(\eta) \cap \sigma$

<u>Dimo</u>: $\subset$ ovvia.

$\supset$ : $\sigma = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_n)$ $\quad \tau = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_k)$

Se $x \in S(\eta) \cap \sigma$ ho

$$x = v_0 + \lambda_1 (v_1 - v_0) + \dots + \lambda_k (v_k - v_0) \qquad \lambda_j \in \mathbb{R}$$
$$= t_0 v_0 + \dots + t_n v_n$$

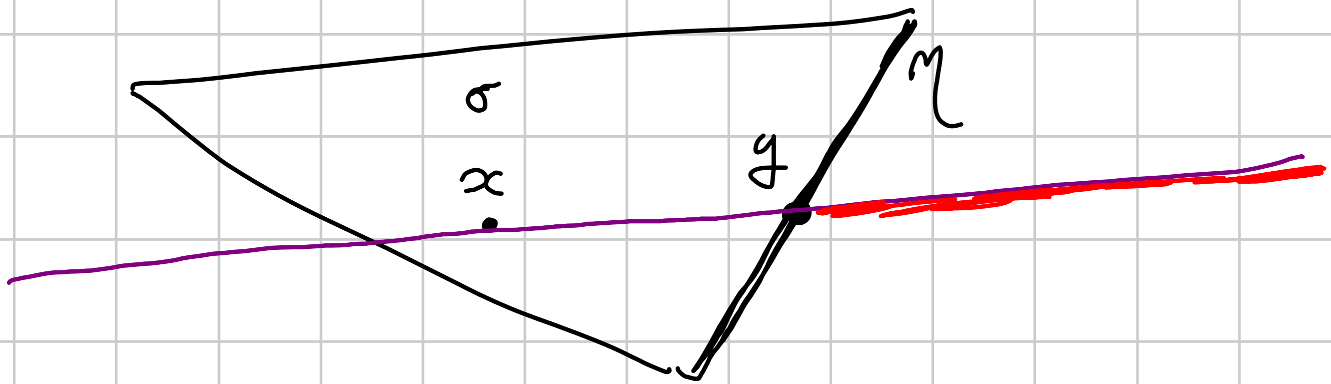
poiché $v_0, \dots, v_n$ sono aff. indip si ha

$$t_j = 0 \text{ per } j > k \implies x \in \eta. \qquad \boxtimes$$

<u>Lem 2</u>: $\sigma$ simplesso, $\eta \subset \sigma$ faccia, $y \in \eta$

$x \in \sigma$, $x \notin \eta \implies$ sulla retta per $x, y$

la semiretta delimitata da $y$ opposta a $x$ non incontra $\sigma_-$




<u>Dimo</u>: Per Lem 1 si ha $x \notin A(\eta)$ quindi:

$x = t_0 v_0 + \cdots + t_n v_n$ con qualche $t_j > 0$, $j > k$

$y = s_0 v_0 + \cdots + s_k v_k$

La semiretta descritta è:

$$\{ y + u(x-y) : u < 0 \}$$

Se incontra $\sigma$ ho

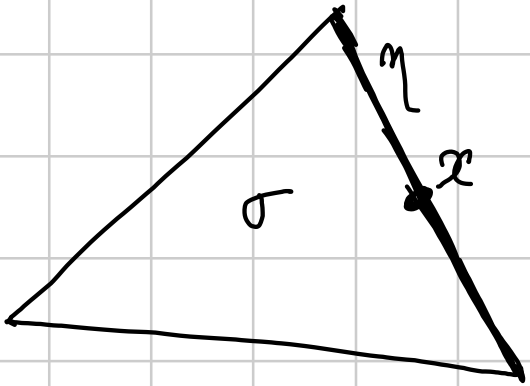
$$\underbrace{y + u(x-y)}_{} = r_0 v_0 + \dots + r_m v_m$$

sostituendo $x$ e $y$
trovo comb. convessa
con $j$-esimo coeff. $u \cdot t_j < 0$ invece $r_j \geq 0$.

∎

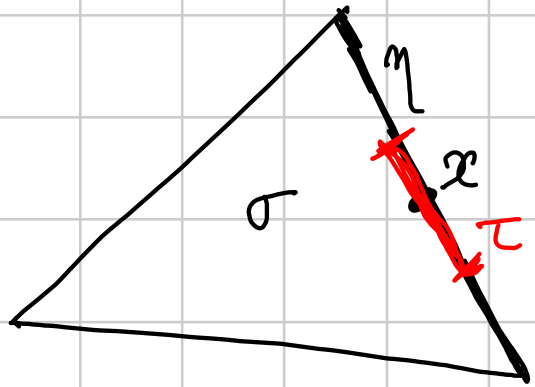
<u>Lem 3</u>: $\sigma$ simplesso, $\eta$ faccia di $\sigma$
$\tau$ simplesso, $\tau \subset \sigma$, $\mathrm{int}(\tau) \cap \eta \neq \emptyset$

$\Longrightarrow \tau \subset \eta$.



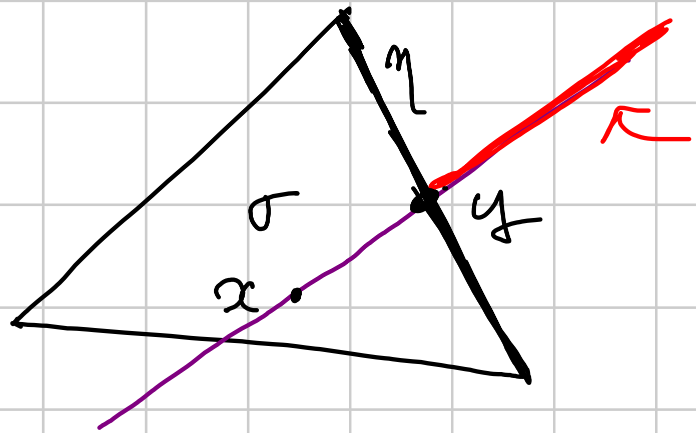

simplesso $\tau$ con
$x \in \mathrm{int}(\tau)$
$\tau \subset \sigma$

$\Longrightarrow$




Dimo: per assurdo sia $x \in \tau$, $x \notin \eta$.
Poiché $\tau \subset \sigma$ ho $x \in \sigma$.

Prendo $y \in \mathrm{int}(\tau) \cap \eta$.




non incontra $\sigma$

$\Longrightarrow$ non incontra $\tau$

ma per ipotesi

$x \in \tau$, $y \in \mathrm{int}(\tau)$:

assurdo. $\blacksquare$

<u>Dimo</u> (Prop: $\mathcal{L}$ suddivide $K \Longrightarrow$ ogni $\sigma \in K$ è unione di $\tau \in \mathcal{L}$).

Sia $\sigma \in K$ e $x \in \sigma$. Devo trovare $\tau \in \mathcal{L}$ t.c. $x \in \tau \subset \sigma$. Poiché $|\mathcal{L}| = \bigsqcup_{\tau \in \mathcal{L}} \mathrm{int}(\tau)$ esiste (unico) $\tau \in \mathcal{L}$ t.c. $x \in \mathrm{int}(\tau)$. Per def. di suddivisione esiste $\sigma' \in K$ t.c. $\tau \subset \sigma'$.

Pongo $\eta = \sigma \cap \sigma'$ che è faccia di $\sigma'$.

Posso applicare Lem3 a $\sigma', \eta, \tau$:

infatti:

$\eta$ è faccia di $\sigma$

$\tau \subset \sigma'$

$x \in \mathrm{int}(\tau)$, $x \in \sigma \Rightarrow x \in \sigma \cap \sigma' = \eta$

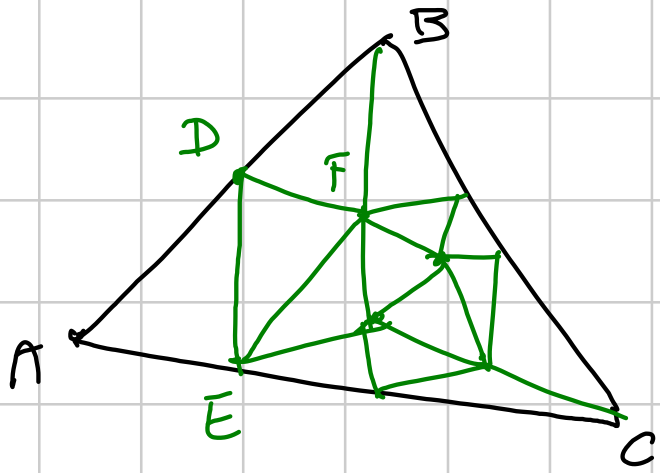
$\Rightarrow \mathrm{int}(\tau) \cap \eta \neq \emptyset$.

$\Rightarrow \tau \subset \eta \Rightarrow \tau \subset \sigma$. $\blacksquare$

Traccia della dim. del Teo 1.

($\mathcal{L}$ suddivide $K \Rightarrow H_n(K) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathcal{L})$).

Fisso $\mathcal{L}$ suddivisione di $K$. Dato $\tau \in \mathcal{L}$
chiamo $a(\tau) \in K$ ("$a$" = antenato)
il più piccolo simplesso di $K$ che contiene $\mathcal{L}$:




$a(AD) = AB$

$a(D) = AB$

$a(DF) = ABC$

$a(F) = ABC$

$a(DEF) = ABC$ .

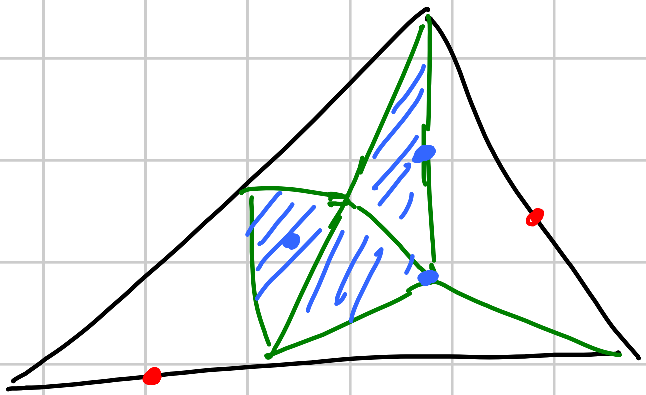
Dimostro alcuni fatti:

(i) $\sigma \in K^{[n]} \Rightarrow \sigma = \bigcup_{\substack{\tau \in \mathcal{L} \\ a(\tau)=\sigma}} \tau = \bigcup_{\substack{\tau \in 2^{[n]} \\ a(\tau)=\sigma}} \tau$

Le inclusioni $\supset$ $\supset$ sono ovvie.

Basta vedere che $\bigcup_{\substack{\tau \in \mathcal{L}^{[n]} \\ a(\tau) = \sigma}} \tau \supset \sigma$

Se $x \in \mathrm{int}(\sigma)$ e prendo $\tau \in \mathcal{L}$ t.c. $x \in \mathrm{int}(\tau)$ ho $a(\tau) = \sigma$



• non ovvio

• ovvio

$\Rightarrow \ldots \bigcup_{\substack{\tau \in \mathcal{L}^{[n]} \\ a(\tau) = \sigma}} \tau \supset \mathrm{int}(\sigma)$

LHS = unione finita di chiusi $\Rightarrow$ chiuso

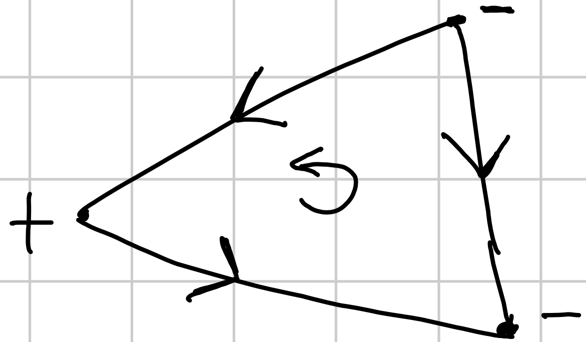
$\Rightarrow \underbrace{LHS}_{} \supset \overline{\mathrm{int}(\sigma)} = \sigma$ . $\blacksquare$

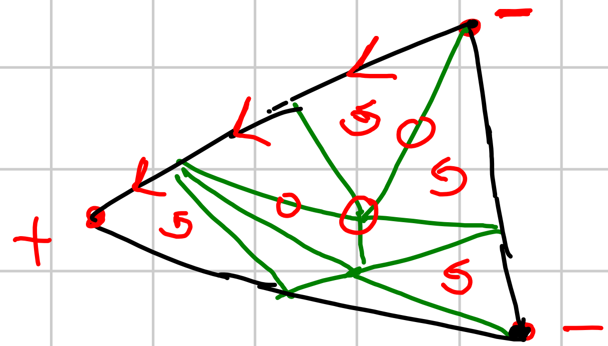
└ left-hand side = membro sinistro

(ii) Conveniamo di orientare ogni $\tau \in \mathcal{L}$

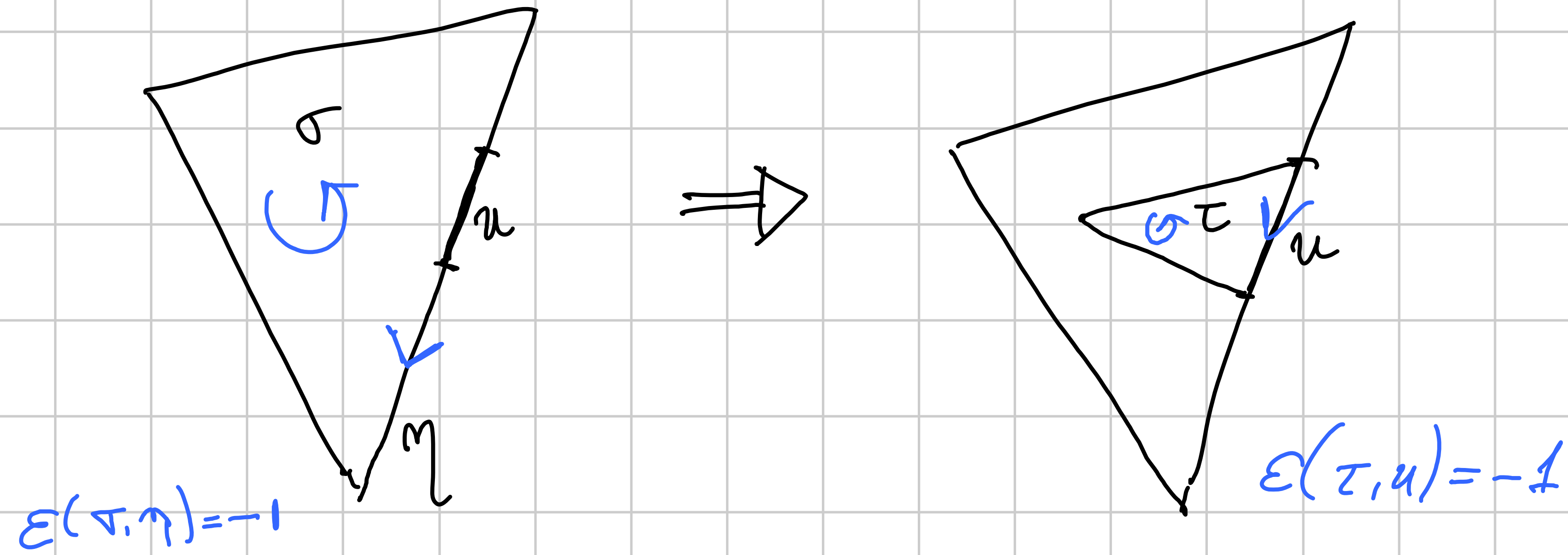
$\to$ come $a(\tau)$ se $\dim(a(\tau)) = \dim(\tau)$

$\to$ a caso se " > "



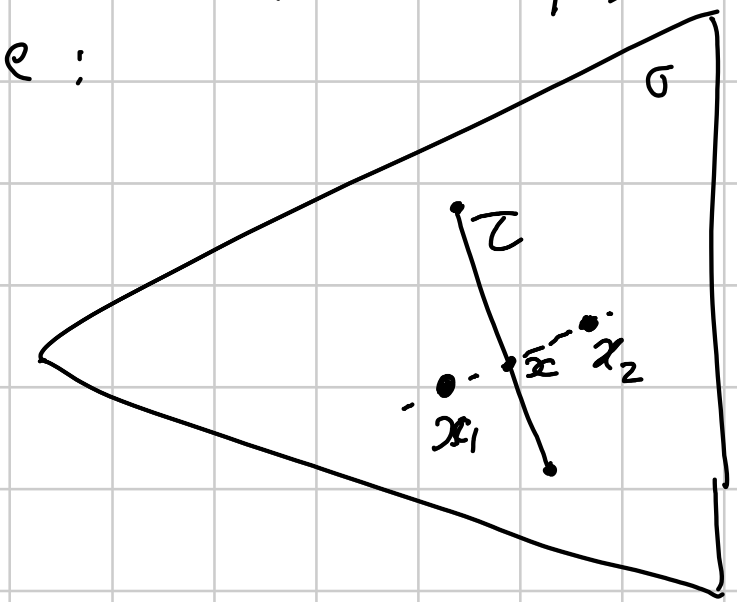
Se $\sigma \in K^{[n]}$, $\eta \subset \sigma$ faccia di codim. 1
$u \in \mathcal{L}^{[n-1]}$, $a(u) = \eta \Longrightarrow \exists!\ \tau \in \mathcal{L}^{[n]}$ t.c.
$a(\tau) = \sigma$ e $u \subset \tau$; inoltre $\varepsilon(\tau, u) = \varepsilon(\sigma, \eta)$.



Infatti preso $x \in \mathrm{int}(u)$ si sceglie $\tau \in \mathcal{L}^{[n]}$ t.c. $x \in \tau$ e $a(\tau) = \sigma$, che esiste per (i).

(iii) $\tau \in \mathcal{L}^{[n-1]}$, $a(\tau) \in K^{[n]} \Longrightarrow$ esistono precisamente due $\beta \in \mathcal{L}^{[n]}$ t.c. $\tau \subset \beta$ e $a(\beta) = a(\tau)$; inoltre, se sono $\beta_1$ e $\beta_2$ ho $\varepsilon(\beta_1, \tau) + \varepsilon(\beta_2, \tau) = 0$.

Idea: prendere $x \in \mathrm{int}(\tau)$ e $x_1, x_2$ sulla retta $x + s(\tau)^\perp$ molto vicini a $x$ e da parti opposte: l'unico $\beta_i \in \mathcal{L}$ t.c. $x_1 \in \mathrm{int}(\beta_i)$ è quello che va bene:

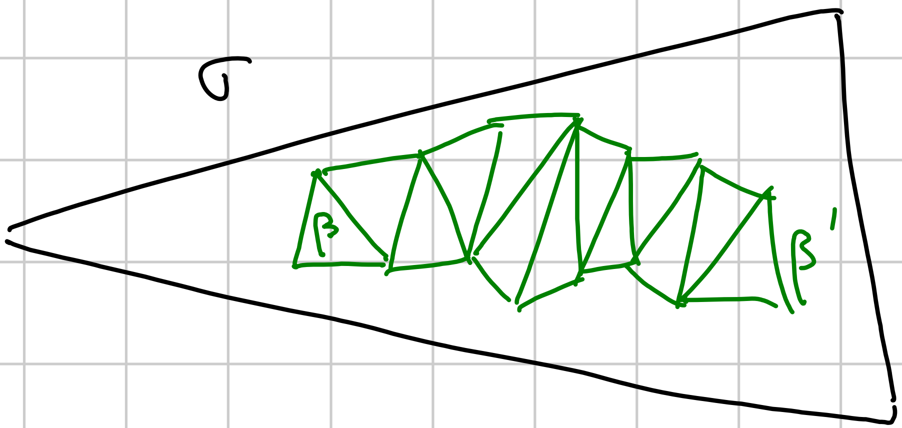


(iv) $\beta, \beta' \in \mathcal{L}^{[n]}$ $\quad a(\beta) = a(\beta') =: \sigma \in \mathcal{K}^{[n]}$

$\Longrightarrow$ esistono $\beta_0, \dots, \beta_k$ t.c.

$\beta_i \in \mathcal{L}^{[n]}$, $a(\beta_i) = \sigma$ $\quad \beta = \beta_0$, $\beta' = \beta_k$

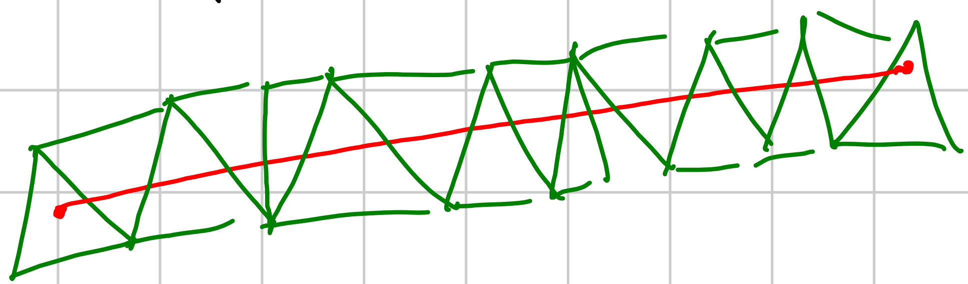
e ogni coppia $\beta_{i-1} \beta_i$ è come nel punto (iii) (condivide faccia di codim 1 su cui le orientaz. indotte sono opposte).



Scelto $x \in \mathrm{int}(\beta)$, $x' \in \mathrm{int}(\beta')$ considero $[x, x']$: a meno di piccola perturbazione ho che $[x, x'] \cap |\mathcal{L}^{(m-2)}| = \emptyset$

$[x, x'] \pitchfork \mathcal{L}^{[m-1]}$

dunque $[x, x']$ incontra trasversalmente $\tau_1, \dots, \tau_k \in \mathcal{L}^{[m-1]}$; ora si applica ripetutamente (iii):



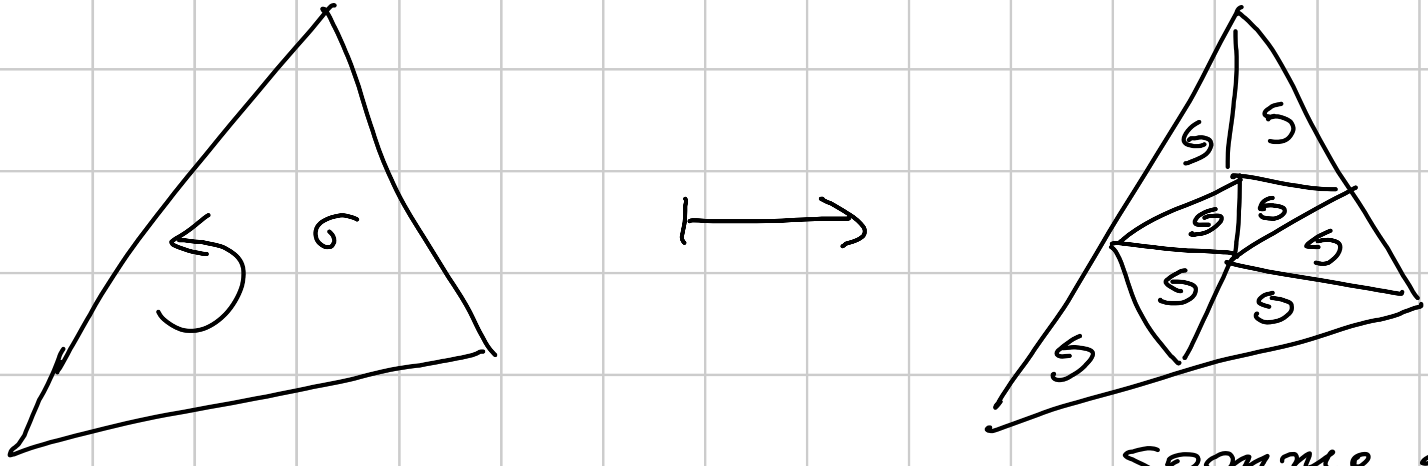
**Teo 1**: Se $\mathcal{L}$ suddivide $\mathcal{K}$ esiste un

$$H_n(\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathcal{L}) \quad \text{naturale}$$

La dimo dipende dai fatti (i)-(iv) e si estende ad altri contesti.

ad orientazioni fissate come sopra.

**Dimo**: Definisco $\psi_n : C_n(\mathcal{K}) \to C_n(\mathcal{L})$ estendendo $\psi_n(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathcal{L}^{[n]},\, a(\tau) = \sigma} \tau$ :



somme di questi simplessi.

Affermo che:

Lo verifico su $\sigma \in K^{[n]}$:

$$\partial^{\mathcal{L}}_{n-1}(\psi_n(\sigma)) = \partial^{\mathcal{L}}_{n-1}\left(\sum_{\substack{\tau\in\mathcal{L}^{[n]}\\ a(\tau)=\sigma}} \tau\right) = \sum_{\substack{\tau\in\mathcal{L}^{[n]}\\ a(\tau)=\sigma}} \sum_{\substack{u\in\mathcal{L}^{[n-1]}\\ u\subset\tau}} \varepsilon^{\mathcal{L}}(\tau,u)\cdot u \qquad (*)$$

$$\psi_{n-1}(\partial^{\mathcal{K}}_n(\sigma)) = \psi_{n-1}\left(\sum_{\substack{\eta\in\mathcal{K}^{[n-1]}\\ \eta\subset\sigma}} \varepsilon^{\mathcal{K}}(\sigma,\eta)\cdot\eta\right) = \sum_{\substack{\eta\in\mathcal{K}^{[n-1]}\\ \eta\subset\sigma}} \sum_{\substack{u\in\mathcal{L}^{[n-1]}\\ a(u)=\eta}} \varepsilon^{\mathcal{K}}(\sigma,\eta)\cdot u \qquad (\circ)$$

Analizziamo il coeff. di $u\in\mathcal{L}^{[n-1]}$ nelle due:
Le $u$ non contenute in $\sigma$ non compaiono in nessuna delle due; per $u\subset\sigma$ due casi:

- $a(u) = \sigma$; in tal caso in ⊛ per (iii) la $u$ compare due volte con $\varepsilon^{\mathcal{L}}$ opposti; invece in ⊙ non compare.
- $a(u) = \eta \in \mathcal{K}^{[n-1]}$, $\eta < \sigma$ faccia di codim 1; in tal caso per (iii) nella ⊛ la $u$ compare una sola volta per un certo $\tau$ e $\varepsilon^{\mathcal{L}}(\tau, u) = \varepsilon^{\mathcal{K}}(\sigma, \eta)$.

Ora:

$$\partial^{\mathcal{L}}_{n-1} \circ \psi_n = \psi_{n-1} \circ \partial^{\mathcal{K}}_n .$$

significa che $(\psi_n)_{n=0}^{+\infty}$ è una mappa tra i complessi di catene

$$(C_n(\mathcal{K}))_{n=0}^{+\infty} \to (C_n(\mathcal{L}))_{n=0}^{+\infty}$$

$\Longrightarrow$ induce $H_n(\psi): H_n(\mathcal{K}) \to H_n(\mathcal{L})$ _

Per provare che è isomorfismo bisogna vedere:

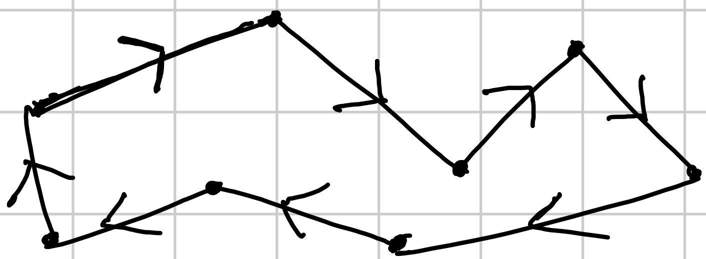
- $\forall z \in Z_m(\mathcal{L})$ $\exists u \in B_m(\mathcal{L}), w \in Z_m(\mathcal{K})$
  t.c. $\psi_m(w) = z + u$

$$\Longrightarrow [z] \in H_n(\mathcal{L}) = H_n(\psi)\Big( \underset{\substack{\cap \\ H_n(\mathcal{X})}}{[w]} \Big)$$

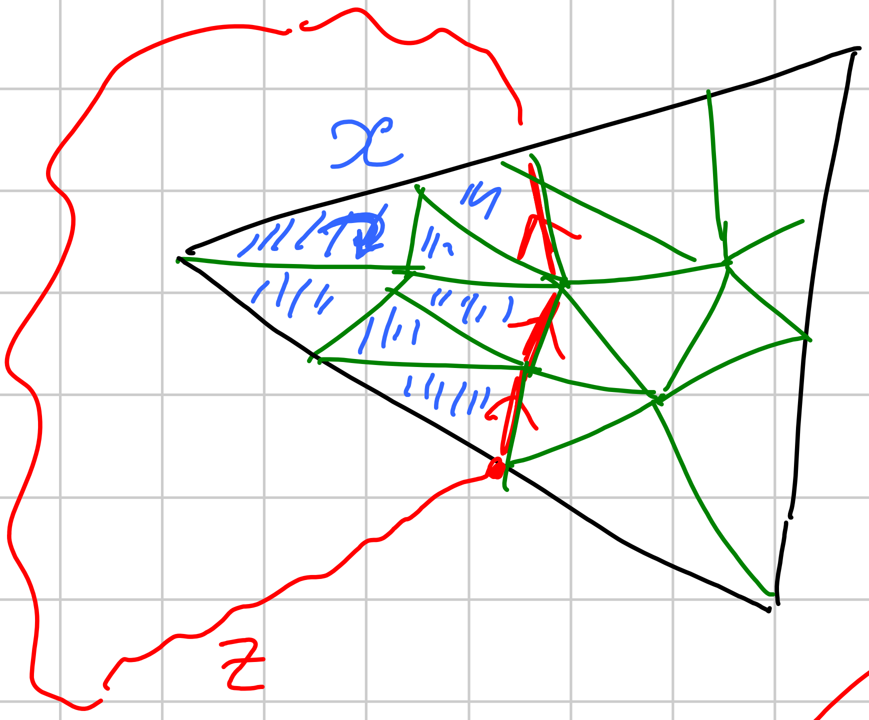
$H_n(\psi)$ surgettiva

(Dimo omessa: idea per $n=1$.

1-ciclo:

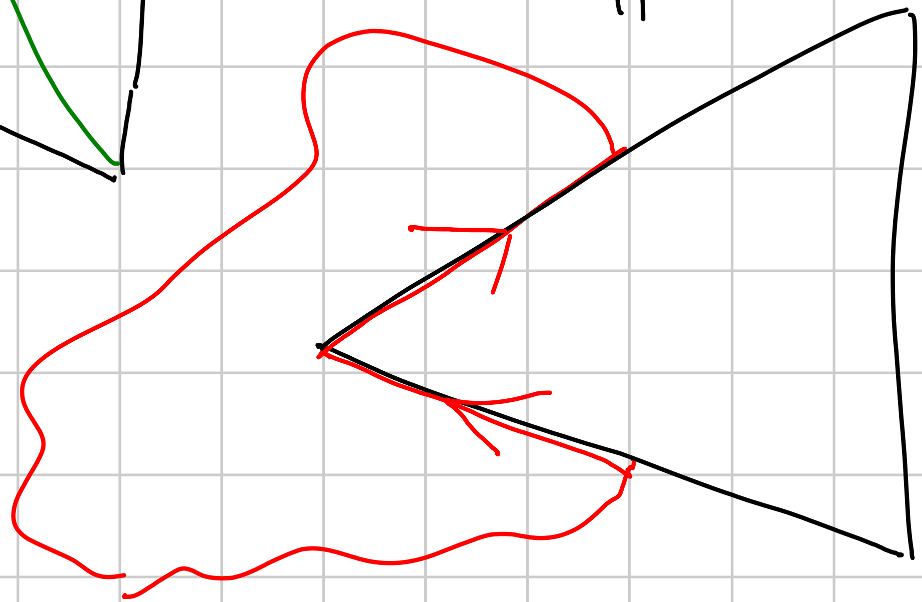


Somma a coeff in $\mathbb{Z}$ di cammini simpliciali dimini orientati




$$z + \partial x$$

$$\| $$



Iniettività (esercizio):

$$\forall z \in Z_n(\mathcal{K}) \text{ t.c. } \psi_n(z) \in B_n(\mathcal{L})$$
allora $z \in B_n(\mathcal{K})$.

$\blacksquare$