UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 21/7/15 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ esista l'inversa di $\begin{pmatrix} 4-k & 5+k \\ -2k & k+4 \end{pmatrix}$ ed esibire tale inversa per $k=-3$.

2. Determinare le coordinate di $26e_1 - 20e_2$ rispetto alla base $(7e_1 - e_2,\ 3e_1 + 5e_2)$ di $\mathbb{R}^2$.

3. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Stabilire che dimensione può avere il nucleo di un'applicazione lineare $f : \mathbb{C}^7 \to \mathbb{C}^4$ non surgettiva e tale che $f(3e_1 - e_7) = e_2 - 2e_3$.

5. Risolvere $\begin{cases} 3x - 4y + 5z = 22 \\ 2x + y + 4z = 3 \\ 7x + 3y - z = 27. \end{cases}$

6. Chiamiamo *nullo* un monomio con coefficiente nullo. Se $p(t)$ e $q(t)$ sono polinomi e si sa che $p(t)$ è la somma di 2 monomi non nulli di gradi diversi, mentre $q(t)$ è la somma di 3 monomi non nulli di gradi diversi, quali sono il minimo e il massimo numero di monomi non nulli di cui $p(t) \cdot q(t)$ può essere la somma? Spiegare.

7. Posto $X = \text{Span}(2e_1 + e_2 - 3e_4,\ 5e_2 + e_3)$ e $Y = \text{Span}(-e_1 + 3e_2 + e_3,\ 4e_2 + 2e_3 + e_4)$ calcolare la proiezione su X di $8e_1 - 4e_2 - e_3 - 8e_4$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 21/7/15 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^5$ considerare il sottospazio X di equazione $3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 8x_4 - 2x_5 = 0$.

(A) (3 punti) Trovare tutti i vettori di X aventi tutte le componenti intere, di cui tre nulle e una uguale a 1.

(B) (2 punti) Disporre i vettori trovati nel punto precedente in modo che sia crescente la somma delle componenti e provare che è possibile completare il sistema di vettori così ottenuto a una base di X.

(C) (2 punti) Tra i vettori di X con tutte le componenti intere e prime tra loro, di cui tre nulle, trovare quello avente la massima somma delle componenti.

(D) (2 punti) Provare che aggiungendo il vettore del punto (C) a quelli del punto (B) si ottiene una base $\mathcal{B}$ di X.

(E) (3 punti) Calcolare $f(-40e_1 + 24e_2)$ dove $f : X \to X$ è lineare e $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare il seguente sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$:

$$E_t : \begin{cases} (1+3t)x + (1-2t)y + (t+2)z = -5t \\ (5-3t)x + (t-1)y + (t-5)z = t+3. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Discutere la dimensione di E_t al variare di t.

(B) (4 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t = -1$ e per tutti i valori di t per i quali E_t ha dimensione differente da quella che ha per $t = -1$.

(C) (4 punti) Trovare un'equazione cartesiana del piano passante per i punti $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e parallelo a E_t per $t = 2$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 21/7/15 — Quesiti

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. L'inversa esiste per k diverso da -8 e -2; per $k = -3$ l'inversa è $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. -13

4. Tra 4 e 6 compresi

5. $x = 5,\ y = -3,\ z = -1$

6. 2 e 6; non meno di 2, perché il prodotto dei due monomi di grado più basso in $p(t)$ e $q(t)$ non può semplificarsi nient'altro, e lo stesso per il prodotto dei due monomi di grado più alto; non più di 6 perché prima di eventuali semplificazioni ci sono 6 addendi; i casi 2 e 6 sono realizzati ad esempio da $(1-t)(1+t+t^2) = 1-t^3$ e da $(1+t)(1+t^2+t^4) = 1+t+t^2+t^3+t^4+t^5$

7. $6e_1 - 2e_2 - e_3 - 9e_4$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $e_4 - 4e_5,\ -2e_1 + e_3,\ e_3 + 3e_5$

(B) L'ordine è il precedente; i vettori sono linearmente indipendenti

(C) $8e_2 + 5e_4$

(D) Il vettore da aggiungere non appartiene al generato dei 3 precedenti, e X ha dimensione 4

(E) $4e_1 - 8e_2 - 5e_3 - 29e_5$

2.

(A) 1 per $t \neq 3$ e 2 per $t = 3$

(B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ per $t = -1$;
$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ per $t = 3$;

(C) $21x - y - 22z = 81$