UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 14/2/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. È sempre possibile completare un insieme di 8 vettori appartenenti a $\mathbb{R}^{13}$ a una base di $\mathbb{R}^{13}$? Se sì, quanti vettori bisogna aggiungere? Spiegare.

2. Trovare le coordinate di $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ di $\mathbb{R}^2$.

3. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^{10} : \ 4x_3 - x_5 + x_9 = 0\}$ e data $f : X \to \mathbb{R}^3$ surgettiva, stabilire che dimensione possa avere un sottospazio Y di X tale che $Y + \mathrm{Ker}(f) = X$.

4. Risolvere $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ 5x + 6y + 2z = -2 \\ 3x - 2y + 5z = -7. \end{cases}$

5. Data $A = (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4) \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ con $\det(A) = -4$,
porre $B = (5v_3,\ -v_3 + 2v_4,\ 3v_2 - 7v_3 + 9v_4,\ 2v_1 + 7v_2 - v_3 + 4v_4)$ e calcolare $\det(B)$.

6. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + 3e_2 - e_3)$, determinare la proiezione su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ del vettore $4e_1 + 2e_2 - 3e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 14/2/15 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio V di equazioni $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$
e il vettore $w = e_1 - 3e_2 - 4e_3 + e_4$.

(A) (1 punto) Provare che w appartiene a V.

(B) (3 punti) Esibire i quattro vettori di V aventi una componente nulla e le altre intere e prime fra loro, con somma positiva.

(C) (2 punti) Indicati con v_j per $j = 1, 2, 3, 4$ i vettori del punto precedente, ordinati in modo che sia decrescente la somma delle coordinate, porre $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ e $\mathcal{C} = (v_3, v_4)$ e provare che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di V.

(D) (3 punti) Trovare le coordinate di w rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto a $\mathcal{C}$.

(E) (3 punti) Data $g : V \to V$ lineare con $[g]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ determinare $g(w)$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare $a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che (a_1, a_2) costituiscono una base $\mathcal{A}$ di un sottospazio A di $\mathbb{R}^4$, e che (b_1, b_2) costituiscono una base $\mathcal{B}$ di un sottospazio B di $\mathbb{R}^4$.

(B) (4 punti) Provare che $\mathbb{R}^4 = A \oplus B$; indicate con f e g le proiezioni associate a questa decomposizione, trovare $f(c)$ e $g(c)$.

(C) (4 punti) Data $\phi : A \to B$ lineare con $[\phi]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ provare che ϕ^{-1} esiste e trovare $[\phi^{-1}]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$.

(D) (3 punti) Provare che la formula $\psi(x) = \phi(f(x)) + g(x)$ definisce un'applicazione $\psi : \mathbb{R}^4 \to B$ lineare, e determinare la dimensione del suo nucleo.

Risposte

5. ♡

1. No: possono non essere linearmente indipendenti. Se sono linearmente indipendenti, ne vanno aggiunti 5

2. $\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 8 \\ -41 \end{pmatrix}$

3. Tra 3 e 9

4. $x = 2,\ y = -1,\ z = -3$

5. 240

6. -110 e 45

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ -7 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$

(C) L'ordine è il precedente; V ha dimensione 2 e sia $\mathcal{B}$ sia $\mathcal{C}$ consistono di due vettori linearmente indipendenti di V

(D) $[w]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[w]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

(E) $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 22 \\ 11 \\ 31 \\ 8 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono sistemi di vettori linearmente indipendenti

(B) $\det(a_1, a_2, b_1, b_2) = -45 \neq 0$; $\quad f(c) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$, $g(c) = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

(C) La matrice di ϕ è invertibile, dunque ϕ lo è, e l'inversa ha matrice
$[\phi^{-1}]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = \left([\phi]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{31}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

(D) La composizione $\phi \circ f$ ha senso perché l'immagine di f è il dominio A di ϕ, è lineare perché f e ϕ lo sono, e ha immagine contenuta nell'immagine di ϕ che è B; g è lineare e ha immagine B; dunque $\phi \circ f + g$ è lineare e ha immagine contenuta in B, pertanto la formula $\psi(x) = \phi(f(x)) + g(x)$ definisce un'applicazione $\psi : \mathbb{R}^4 \to B$ lineare; su A la g è nulla e f è l'identità, dunque ψ coincide con ϕ, che è surgettiva, dunque ψ è surgettiva; ne segue che il suo nucleo ha dimensione 2