UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 14/2/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Da un insieme di 17 vettori appartenenti a $\mathbb{R}^6$ è sempre possibile estrarre una base di $\mathbb{R}^6$? Se sì, quanti vettori bisogna scartare? Spiegare.

2. Trovare le coordinate di $\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$ di $\mathbb{R}^2$.

3. Data $f : \{x \in \mathbb{R}^5 : \ 7x_1 - x_2 + x_4 = 0\} \to \mathbb{R}^{11}$ iniettiva, stabilire che dimensione possa avere un sottospazio W di $\mathbb{R}^{11}$ tale che $W + \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^{11}$.

4. Risolvere $\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ 5x + 6y + 2z = 5 \\ 3x - y - 5z = 6. \end{cases}$

5. Data $A = (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4) \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ con $\det(A) = -5$,
porre $B = (2v_4,\ -v_3 + 5v_4,\ 6v_1 - 7v_3 + 9v_4,\ 3v_1 + 2v_2 - v_3 + 4v_4)$ e calcolare $\det(B)$.

6. Calcolare i determinanti delle orlate di $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 6x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + 2e_2 + 4e_3)$, determinare la proiezione su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$ del vettore $4e_1 + e_2 - 4e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 14/2/15 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio X di equazioni $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ e il vettore $v = -e_1 + 4e_2 + 3e_3 - e_4$.

(A) (1 punto) Provare che v appartiene a X.

(B) (3 punti) Esibire i quattro vettori di X aventi una componente nulla e le altre intere e prime fra loro, con somma positiva.

(C) (2 punti) Indicati con w_j per $j = 1, 2, 3, 4$ i vettori del punto precedente, ordinati in modo che sia decrescente la somma delle coordinate, porre $\mathcal{B} = (w_3, w_4)$ e $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ e provare che $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono basi di X.

(D) (3 punti) Trovare le coordinate di v rispetto a $\mathcal{B}$ e rispetto a $\mathcal{C}$.

(E) (3 punti) Data $f : X \to X$ lineare con $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ determinare $f(v)$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che (v_1, v_2) costituiscono una base $\mathcal{B}$ di un sottospazio V di $\mathbb{R}^4$, e che (w_1, w_2) costituiscono una base $\mathcal{C}$ di un sottospazio W di $\mathbb{R}^4$.

(B) (4 punti) Provare che $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$; indicate con p e q le proiezioni associate a questa decomposizione, trovare $p(z)$ e $q(z)$.

(C) (4 punti) Data $g : V \to W$ lineare con $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ provare che esiste g^{-1} e trovare $[g^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

(D) (3 punti) Provare che la formula $f(x) = g(p(x)) + q(x)$ definisce un'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to W$ lineare, e determinare la dimensione del suo nucleo.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. No: possono non generare $\mathbb{R}^6$. Se generano, ne vanno scartati 11

2. $\frac{1}{31}\begin{pmatrix} 6 \\ -53 \end{pmatrix}$

3. Tra 7 e 11

4. $x = 3,\ y = -2,\ z = 1$

5. -120

6. -43 e -95

7. $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} -2 \\ 17 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -7 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

(C) L'ordine è il precedente; X ha dimensione 2 e sia $\mathcal{B}$ sia $\mathcal{C}$ consistono di due vettori linearmente indipendenti di X

(D) $[v]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $[v]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(E) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ 31 \\ 11 \\ 22 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono sistemi di vettori linearmente indipendenti

(B) $\det(v_1, v_2, w_1, w_2) = -45 \neq 0$; $\quad p(z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $q(z) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

(C) La matrice di g è invertibile, dunque g lo è, e l'inversa ha matrice
$[g^{-1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \left([g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(D) La composizione $g \circ p$ ha senso perché l'immagine di p è il dominio V di g, è lineare perché p e g lo sono, e ha immagine contenuta nell'immagine di g che è W; q è lineare e ha immagine W; dunque $g \circ p + q$ è lineare e ha immagine contenuta in W, pertanto la formula $f(x) = g(p(x)) + q(x)$ definisce un'applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to W$ lineare; su V la q è nulla e p è l'identità, dunque f coincide con g, che è surgettiva, dunque f è surgettiva; ne segue che il suo nucleo ha dimensione 2