UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 8/1/15 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Posto $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ trovare $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tale che $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right]_{(v_1,v_2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Dati 3 vettori linearmente indipendenti in $\{z \in \mathbb{C}^9 : \ iz_2 + 7z_9 = (1-i)z_2 + z_6 = 0\}$, quanti vettori bisogna aggiungere per ottenere una base?

3. Posto $V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t] : \ p'(2) = 0\}$, esibire un'applicazione lineare iniettiva $f : V \to \mathbb{R}^3$, oppure provare che non esiste alcuna tale f.

4. Risolvere $\begin{cases} 4x - 5y + z = 23 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ -3x + 2y + z = -12. \end{cases}$

5. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che $f\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$, calcolare $f^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Posto $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0\}$ e $Z = \mathrm{Span}(2e_1 - 3e_2 - e_3)$, calcolare la proiezione su W rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ del vettore $e_1 - 2e_2 + 2e_3$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♣ 2. ♠ 3. ♡ 4. ♢ 5. ♠ 6. ♡ 7. ♣ 8. ♢ 9. ♠ 10. ♡

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 8/1/15 — Esercizî

1. Considerare i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

(A) (3 punti) Provare che esiste una e una sola applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(v_j) = u_j$ per $j = 1, 2, 3$.

(B) (2 punti) Provare che $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ è una base di $\mathbb{R}^2$.

(Le risposte alle due successive domande contengono numeri non piccoli; chi lo desidera può esprimere le risposte lasciando indicate operazioni tra matrici numeriche, senza eseguirle.)

(C) (4 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{E}_2}_{\mathcal{E}_3}$, dove $\mathcal{E}_n$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

(D) (3 punti) Determinare $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_3}$.

2. Al variare di $s \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio affine

$$F_s = \begin{pmatrix} 3 \\ s \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ s \\ 4+3s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s-4 \\ s+1 \\ 4s+7 \end{pmatrix}\right).$$

(A) (3 punti) Trovare un'equazione cartesiana di F_{-3} (cioè di F_s per $s = -3$).

(B) (3 punti) Trovare i valori $s_0 < s_1$ di s per i quali F_s non è un piano.

(C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_{s_0} ed F_{s_1} (cioè di F_s per i valori s_0 e s_1 di s trovati nel punto precedente).

(D) (3 punti) Provare che F_{s_0} ed F_{s_1} sono rette sghembe.

Risposte

3. ♡

1. $\begin{pmatrix} 5 \\ -11 \end{pmatrix}$

2. 4

3. L'unica f tale che $f(1) = e_1,\ f(t^2 - 4t) = e_2$

4. $x = 3,\ y = -2,\ z = 1$

5. $\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix}$

6. 5

7. $\begin{pmatrix} -15 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1.

(A) $\det(v_1, v_2, v_3) = 1 \neq 0$, dunque (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbb{R}^3$, dunque segue dalla teoria

(B) $\det(w_1, w_2) = -33 \neq 0$

(C) $\begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & -5 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -33 & -10 \\ -14 & 39 & 12 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & -5 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{33}\begin{pmatrix} -61 & 186 & 58 \\ 68 & -183 & -56 \end{pmatrix}$

2.

(A) $x - 3y + z = 13$

(B) $s_0 = -2$, $s_1 = 2$

(C) $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x + 2z = 17 \end{cases}$

(D) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ è una base di $\mathbb{R}^3$