<u>30/4/2014</u>

Classificazione delle coniche proiettive:

Sia $\mathcal{P} = \{ [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid {}^t x \cdot A \cdot x = 0 \}$, dove A è simmetrica, reale, $(n+1) \times (n+1)$ con $\det A \neq 0$.

Se facciamo un cambio di coordinate proiettive: $[x'] = [M \cdot x]$, l'equazione ${}^t x' \cdot A \cdot x' = 0$ equivale a

$${}^t x \cdot {}^t M \cdot A \cdot M \cdot x = 0$$

nelle nuove coordinate. Per il teorema spettrale, possiamo scegliere M ortogonale tale che ${}^t M A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$.

L'ulteriore cambio di coordinate

$$x'_j = \sqrt{|\lambda_j|} \cdot x_j \quad , \quad j = 1, \dots, n+1$$

riduce A ad una forma diagonale con ± 1 sulla diagonale principale. Infine, a meno di permutare le coordinate e cambiare il segno all'equazione, questa si può ridurre a

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_p^2 - \dots - x_{n+1}^2 = 0, \; p \geq n+1-p.$$

Abbiamo dimostrato:

Teorema: A meno di cambiamenti proiettivi di coordinate,

$$\{ {}^t x \cdot A \cdot x = 0 \} = \{ x_1^2 + \dots + x_p^2 = x_{p+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2 \},$$
$\det A \neq 0$ $\qquad p \geq n+1-p$ $\boxtimes$

Caso di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$: in opportune coordinate proiettive, ogni conica non degenere è data da una delle equazioni:

$$\underset{\emptyset}{x^2 + y^2 + z^2 = 0}, \quad x^2 + y^2 = z^2$$

$\Rightarrow$ i completamenti proiettivi delle coniche affini ellisse, iperbole e parabole sono tutte date, in opportune coordinate, dalla stessa equazione $x^2 + y^2 = z^2$ e quindi coincidono a meno di cambiamenti di coordinate proiettive.

Per l'ellisse lo sappiamo già:

$$x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow x^2 + y^2 = z^2$$

Iperbole: $x^2 - y^2 = z^2$

Il cambiamento $[x : y : z] \mapsto [z : x : y]$ trasforma l'equazione in forma standard.

Parabole : $x^2 = yz$

Il cambiamento di coordinate

$$[x:y:z] \longmapsto [x: z-y : z+y]$$

trasforma l'equazione in forma standard.

Sia ora $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ la conica affine data da ${}^t\!\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$,

con $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, simmetrica, $\det(A) \neq 0$.

Un cambiamento di coordinate affini è dato dalla moltiplicazione per

$$M = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \det B \neq 0:$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\binom{x}{y} + v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice associata all'equazione risultante dal cambiamento di coordinate diventa:

$$ {}^tMAM = \begin{pmatrix} {}^tB & 0 \\ {}^tv & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = $$

$$ = \begin{pmatrix} {}^tBQ & {}^tB\ell \\ {}^tvQ + {}^t\ell & {}^tv\ell + c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tBQB & {}^tB(Qv+\ell) \\ ({}^tvQ + {}^t\ell)B & \langle v|v\rangle_Q + 2\langle v|\ell\rangle + c \end{pmatrix}$$

Sia $d_j(A) :=$ determinante della sottomatrice ④
di A data dalle prime j righe e colonne.
Consideriamo i casi:
(1) Autovalori di A concordi tra loro
(2) Autov. di Q concordi, ma non quelli di A
(3) Autovalori di Q discordi
(4) Q singolare
<u>Affermazione</u>: A rientra in uno dei quattro casi, e ${}^tMAM$ rientra nello stesso caso per ogni M.
La seconda parte segue dal fatto che il numero di autovalori positivi (risp.te negativi) di A coincide con la dimensione massima di un s.s. $W \subset \mathbb{R}^3$ t.c. $\langle w|w\rangle_A > 0$ (risp.te <0) $\forall\, w \in W \setminus \{0\}$. Poiché $\langle w|w\rangle_{{}^tMAM} = \langle Mw|Mw\rangle_A$ ed M è invertibile, questo numero è lo stesso per A e per ${}^tMAM$.
Scegliendo M con $\vartheta = 0$ ed eventualmente cambiando segno all'equazione ci si può ricondurre ai casi: (A) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
(B) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $d_3 > 0$; (C) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
[Osservando che $\det A \neq 0 \Rightarrow Q \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$]
A seconda del segno di c, il caso (A) diventa (1) o (2).

Scegliendo $B = I_2$ e $v = -Q^{-1}\ell$,
nei casi (A) e (B) ci si può ridurre ad $\ell = 0$.
Di conseguenza, a seconda del segno di c, a meno di moltiplicare l'equazione per una costante diversa da zero si ottiene una delle forme:

(1) $x^2+y^2+1=0$ $\emptyset$ (2) $x^2+y^2=1$ ellisse (3) $x^2-y^2=1$ iperbole

Nel caso (C), se $\ell = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \end{pmatrix}$, per $B = I_2$ e $v = \begin{pmatrix} -\ell_1 \\ 0 \end{pmatrix}$
si ottiene $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & k & c \end{pmatrix}$, dove $k \neq 0$.

L'equazione assume la forma
$$x^2 + 2ky + c = 0,$$
e con il cambiamento $(x,y) \mapsto \left(x, -\frac{1}{2k}(y+c)\right)$
ci si riduce all'equazione $y = x^2$
della parabola.

Abbiamo ottenuto la classificazione affine delle coniche ${}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, $\det A \neq 0$:

(1) $d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 > 0$ insieme vuoto
(2) $d_2 > 0$, $d_1 \cdot d_3 < 0$ ellisse
(3) $d_2 < 0$ iperbole (4) $d_2 = 0$ parabola

Modelli affini delle quadriche:

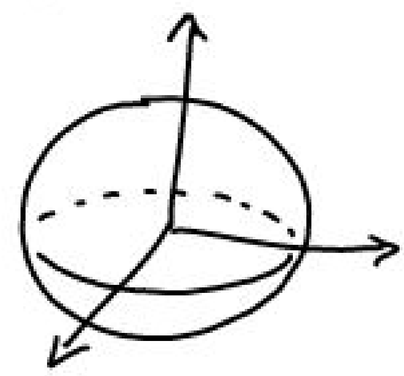
Quadrica non degenere:

$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 , $$

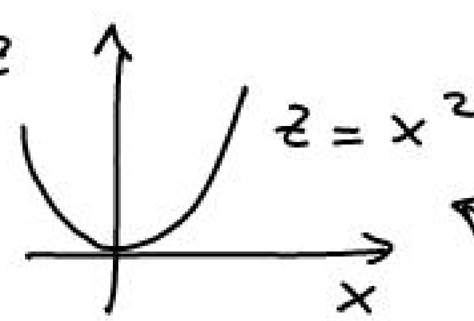
$$ A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}), \quad A = {}^tA , \quad \det(A) \neq 0 $$

$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ insieme vuoto

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ellissoide



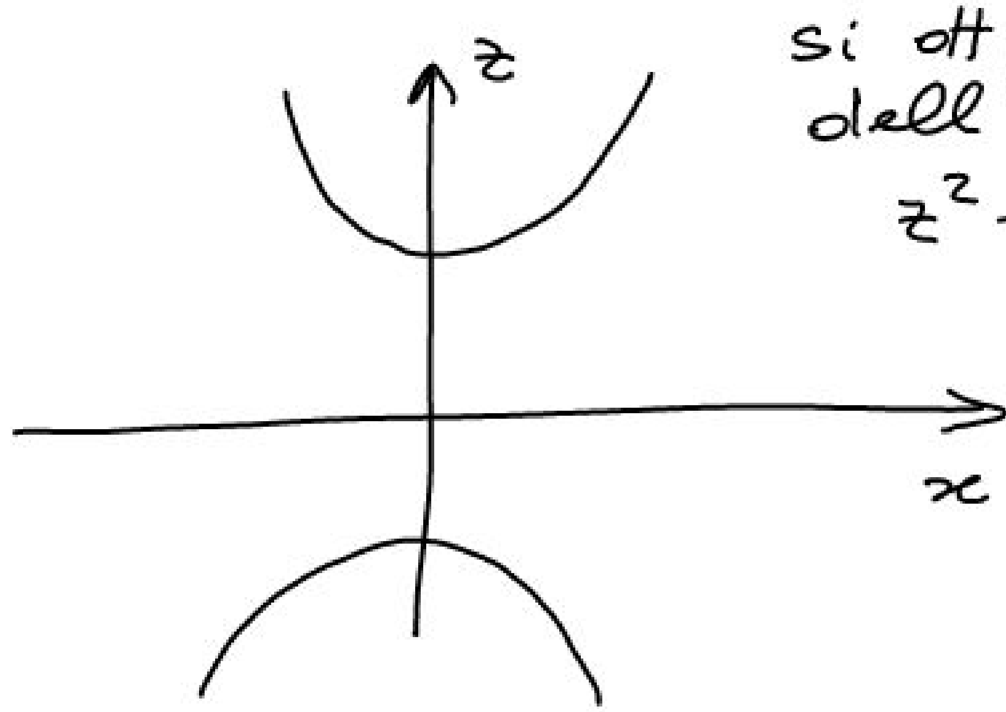
$z = x^2 + y^2$ paraboloide ellittico



si ottiene per rotazione della parabola, intorno all'asse z.

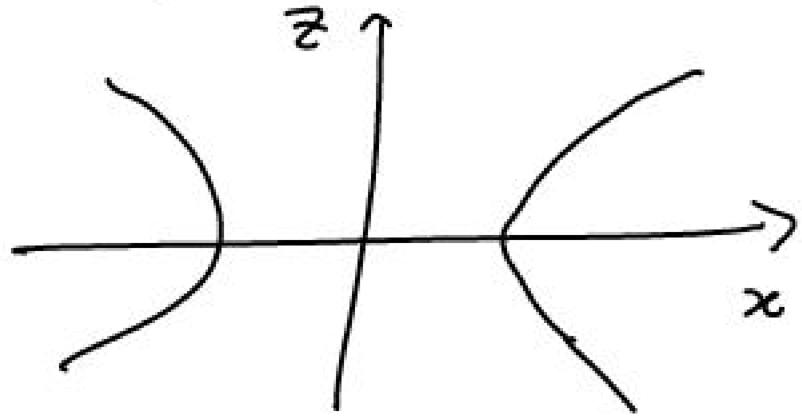
$x^2 + y^2 = z^2 - 1$ iperboloide ellittico

si ottiene per rotazione dell'iperbole $z^2 - x^2 = 1$



$x^2 + y^2 = z^2 + 1$ iperboloide iperbolico

si ottiene per rotazione dell'iperbole:



$x^2 - z^2 = 1$

L'intersezione col piano $y = 1$ è l'unione di due rette: $\begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -z \\ y = 1 \end{cases}$

Fatto notevole: facendo ruotare una qualunque delle due rette intorno all'asse z si ottiene l'intera superficie!

$z = x^2 - y^2$ paraboloide iperbolico o a sella

È unione delle iperboli $\begin{cases} z = k \\ x^2 - y^2 = k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

delle parabole $\begin{cases} y = k \\ z = x^2 - k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

e delle rette $\begin{cases} x + y = k \\ z = k(x - y) \end{cases}$ e $\begin{cases} x - y = k \\ z = k(x + y) \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

Punti all'∞ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$:

Ellissoide: $x^2+y^2+z^2=1 \to \begin{cases} x^2+y^2+z^2=u^2 \\ u=0 \end{cases}$ ϕ

Iperboloide ellittico: $x^2+y^2=z^2-1 \to \begin{cases} x^2+y^2=z^2-u^2 \\ u=0 \end{cases}$: $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ conica

Iperboloide iperbolico: $x^2+y^2=z^2+1 \to \begin{cases} x^2+y^2=z^2+u^2 \\ u=0 \end{cases}$: $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ conica

Paraboloide ellittico: $z=x^2+y^2 \to \begin{cases} zu=x^2+y^2 \\ u=0 \end{cases}$: il punto $[0:0:1:0]$

Paraboloide iperbolico $z=x^2-y^2 \to \begin{cases} zu=x^2-y^2 \\ u=0 \end{cases}$: le due rette $\{[1:1:\lambda:0]\}$, $\{[1:-1:\lambda:0]\}$.

Infine: sappiamo che, a meno di cambiamenti di coordinate proiettive, in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ esistono 2 quadriche non vuote:

$$x^2+y^2+z^2=u^2 \quad e \quad x^2+y^2=z^2+u^2$$

ellissoide proiettivo — iperboloide proiettivo

completamento proiettivo di ellissoide, paraboloide ellittico e iperboloide ellittico

completamento proiettivo di iperboloide iperbolico e paraboloide iperbolico

Ovvio per ellissoide e iperboloidi

Per i paraboloidi: cambio di variabili $\begin{matrix} z=w-v \\ u=w+v \end{matrix}$