ESERCIZI DEL 25/3/2014

$\boxed{11}$ $$p_A(t) = \begin{vmatrix} t - 3/2 & 3/4 & 3\sqrt{3}/4 \\ 3/4 & t + 9/8 & \frac{7\sqrt{3}}{8} \\ 3\sqrt{3}/4 & \frac{7\sqrt{3}}{8} & t - 5/8 \end{vmatrix} =$$

$$= [\text{conti}] = t^3 - t^2 - 6t = t(t^2 - t - 6) =$$
$$= t(t+2)(t-3)$$

Poiché $\lambda = 0$ è un autovalore, A è singolare. Per trovare un' autovettore basta trovare una soluzione non banale del sistema: $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le righe della matrice sono dipendenti $\Rightarrow$ possiamo assegnare valore 1 ad y e risolvere il sistema dato dalle prime due righe rispetto ~~ad~~ x e z:

$$\begin{cases} \overset{2}{\cancel{12}}x + \cancel{6}\sqrt{3}\,z = \cancel{6}\ 1 \\ -6x - 7\sqrt{3}\,z = 9 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 9 & -7\sqrt{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -6 & -7\sqrt{3} \end{vmatrix} = -8\sqrt{3}} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}}{-8\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$\Rightarrow (2, 1, -\sqrt{3})$ 0-autovettore.

Normalizziamo:

$$\sqrt{4+1+3} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2, 1, -\sqrt{3}\right)$$

Analogamente, un (-2)-autovettore si trova risolvendo: $\left((-2)\cdot I - A\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(-2)\cdot I - A = \begin{pmatrix} -7/2 & 3/4 & -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ 3/4 & -7/8 & 7\sqrt{3}/8 \\ -3\sqrt{3}/4 & 7\sqrt{3}/8 & -21/8 \end{pmatrix}.$$

Visto che $\begin{vmatrix} -7/2 & 3/4 \\ 3/4 & -7/8 \end{vmatrix} = 5/2 \neq 0$,

possiamo porre ~~z=1~~ e risolvere rispetto a x, y, ottenendo $(0, \sqrt{3}, 1)$.

Normalizzando: $v_2 = \frac{1}{2}(0, \sqrt{3}, 1)$

Osserviamo che $v_1 \cdot v_2 = 0$

Infine, il sistema $(3\cdot I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ammette la soluzione

$(-2, 1, -\sqrt{3})$, che normalizzata dà il terzo vettore cercato:

$$v_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-2, 1, -\sqrt{3}\right).$$

$\boxed{12}$ (a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

I determinanti delle sottomatrici principali sono $d_1 = 3 > 0$, $d_2 = 3 - 4 = -1 < 0$,
$d_3 = \det A = -116 < 0$

Quindi i segni degli autovalori sono :

$+ , - , +$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -2 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$d_1 = -1 < 0$, $d_2 = 5 + 4 = 9 > 0$,
$d_3 = \det A = 236 > 0 \Rightarrow$

Segni : $- , - , +$

$\boxed{13}$ (a)

$$f(x,y) = x^2 \cdot \cos(xy) + 2y^2 - 3xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos(xy) - 4xy \operatorname{sen}(xy) - x^2y^2\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3x^2 \operatorname{sen}(xy) - x^2 \operatorname{sen}(xy) - x^3 y \cos(xy) - 3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^4 \cos(xy) + 4$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 2 > 0$, $d_2 = -1 < 0$

$\Rightarrow$ un autovalore negativo e uno positivo $\Rightarrow$

$(0,0)$ né max né min.

(b)

$$f(x,y) = x \cdot \ln(1+y) + 3 \operatorname{sen}^2 y + x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{1+y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{x}{(1+y)^2} - 6 \operatorname{sen}^2 y + 6 \cos^2 y$$

$$\Rightarrow \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 2 > 0, \quad d_2 = 11 > 0$$

$\Rightarrow$ 2 autovalori positivi $\Rightarrow$

$(0,0)$ p.to di minimo relativo per f.

(c)

$$f(x,y) = e^{xy} \cdot \cos(2x - y) - 2xy$$

$$\partial^2 f / \partial x^2 = e^{xy} \cdot \left[(y^2 - 4) \cdot \cos(2x - y) - 4y \cdot \operatorname{sen}(2x - y) \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} \cdot \left[(xy + 3) \cos(2x - y) + (y - 2x) \operatorname{sen}(2x - y) \right] - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{xy} \cdot \left[(x^2 - 1) \cos(2x - y) + 2x \operatorname{sen}(2x - y) \right]$$

$$\Rightarrow \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$d_1 = -4 < 0, \quad d_2 = 3 > 0$

$\Rightarrow$ 2 autovalori negativi

$\Rightarrow$ $(0,0)$ p.to di max. relativo.

$\boxed{14}$ (b)

$$A \cdot \bar{A}^t = \bar{A}^t \cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ normale}$$

$$p_A(t) = t^2 - 14(1-i)\,t - 100\,i$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 7(1-i) \pm \sqrt{-98i + 100i}$$

$$= 7(1-i) \pm (1+i) \begin{cases} 8-6i \\ 6-8i \end{cases}$$

Determiniamo un $(8-6i)$-autovettore:

$$\left((8-6i)\cdot I - A\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} (1+i)x + (-1-i)y = 0 \\ (-1-i)x + (1+i)y = 0 \end{cases}$$ righe dip.ti

$\iff (1+i)x = (1+i)y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

Il vettore $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale rispetto al prodotto hermitiano standard $\Rightarrow$ deve essere (e infatti lo è!) un $(6-8i)$-autovettore. Normalizzando v_1 e v_2 si ottiene la base cercata:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{14}$ (c)

$$A \cdot \bar{A}^t = \begin{pmatrix} 62 & -39-9i \\ -39+9i & 26 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\bar{A}^t \cdot A = \begin{pmatrix} 35 & 42-9i \\ 42+9i & 53 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A non è normale.

$\boxed{14}$ (e) $A \cdot \bar{A}^t = \bar{A}^t \cdot A = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow$ A normale

$p_A(t) = t^2 - 10(1+i)\,t + 100i = (t-10)(t-10i)$

La prima riga del sistema $(10I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

è $(5-5i)\,x = (1+7i)\,y$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1+7i \\ 5-5i \end{pmatrix}$ è un 10-autovettore.

$\begin{pmatrix} -1+7i \\ 5+5i \end{pmatrix}$ è ortogonale in $\mathbb{C}^2$ $\Rightarrow$

è un $10i$-autovettore. Le norme di questi vettori sono $\sqrt{50+50} = 10$

$\Rightarrow$ la base ortonormale cercata è

$$\left\{ \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1+7i \\ 5-5i \end{pmatrix}, \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1+7i \\ 5+5i \end{pmatrix} \right\}$$

$\boxed{15}$ M unitaria $\Longleftrightarrow M \cdot \bar{M}^t = I \Longleftrightarrow$ le righe di M sono una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ rispetto al prodotto hermitiano standard, dove n = ordine di M. Le righe A_i della matrice assegnata A sono una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$:

$$A_1 \cdot \bar{A}_1^t = \frac{1}{4}\left(|1|^2 + |-i\sqrt{2}|^2 + |-i|^2\right) = 1$$

$$A_1 \cdot \bar{A}_2^t = \frac{1}{4}\left(i\sqrt{2} + 0 - i\sqrt{2}\right) = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

etc. : $A_i \cdot \bar{A}_j^t = \delta_{ij} \quad \forall\, i,j = 1,\dots,3$.

$\boxed{16}$ (a) $\begin{pmatrix} -3 & 1+4i \\ 1-4i & -1 \end{pmatrix}$ è Hermitiana

$d_1 = -3 < 0$, $d_2 = 3 - (1+16) = -14 < 0$

$\Rightarrow$ segni : $-$, $+$

$\boxed{16}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 0 & 1+i \\ -1 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$ Hermitiana

$d_1 = 2 > 0$, $d_2 = i^2 = -1 < 0$

$d_3 = -4 < 0$

$\Rightarrow$ segni : $+$, $-$, $+$

17 (a) righe di A = base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ A ortogonale. 10

$$\det(A) = \frac{1}{(\sqrt{6})^3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$p_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha grado 3 $\Rightarrow$ ha autovalori $\lambda, z, \bar{z}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$,

$|\lambda| = |z| = 1 \Rightarrow 1 = \det A = \lambda \cdot z \cdot \bar{z} = \lambda$

$z = \cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta$, con

$$\operatorname{tr} A = \lambda + z + \bar{z} = 1 + 2\cos\vartheta_0 \iff$$

$$\cos\vartheta_0 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - 1) = \frac{1}{2\sqrt{6}}(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$\operatorname{sen}\vartheta_0 = \sqrt{1 - \cos^2\vartheta} = \sqrt{\frac{1}{12}(9 - \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{6})}$$

forma canonica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta_0 & -\operatorname{sen}\vartheta_0 \\ 0 & \operatorname{sen}\vartheta_0 & \cos\vartheta_0 \end{pmatrix}$$

17 (b) $A = A^t$ simmetrica

$$p_A(t) = t^3 - 6t^2 + 3t + 10 = (t+1)(t-2)(t-5)$$

$\Rightarrow$ forma canonica: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

$\boxed{17}$ (c) $A = -A^t$ antisimmetrica

$$p_A(t) = t^3 + 14t = t(t^2 + 14)$$

$$\Rightarrow \text{f.c.} \quad \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{14} & 0 \\ \sqrt{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) $A = \bar{A}^t$ Hermitiana

$$p_A(t) = (t^2 - t - 12) = (t+3)(t-4)$$

$$\text{f.c.} \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(e) $A\bar{A}^t = \bar{A}^t A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Normale

$$p_A(t) = t^2 - \sqrt{2} \cdot t + 1, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$$

$$\text{f.c.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

(f) $A = -\bar{A}^t$ Antihermitiana

$$p_A(t) = t^2 - it + 6, \quad \lambda_{1,2} \begin{cases} -2i \\ 3i \end{cases}$$

$$\text{f.c.} \quad \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & 3i \end{pmatrix}.$$